DEPARTAMENTUL
MATEMATICĂ-INFORMATICĂ
UNIVERSITATEA DIN PITEȘTI

MATINF

PUBLICAȚIE BIANUALĂ
DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ
PENTRU ELEVI ȘI PROFESORI

Anul IV, nr. 7 / 2021

ISSN 2601-9426
ISSN-L 2601-8829

Editura
Universității din Pitești

Editată de: DEPARTAMENTUL MATEMATICĂ-INFORMATICĂ,
UNIVERSITATEA DIN PITEȘTI

Comitetul de redacție:

Stelian Corneliu ANDRONESCU	Eduard ASADURIAN
Tudor BĂLĂNESCU	Costel BĂLCĂU - redactor șef
Loredana BĂLILESCU	Doru CONSTANTIN
Şerban COSTEA	Laurențiu DEACONU
Maria-Crina DIACONU	Ionuț DINCĂ
Mihaela DUMITRACHE	Mihai Armand IONESCU
Florentin IPATE	Constantin GEORGESCU
Raluca Mihaela GEORGESCU	Camelia GHELDIU
Marius MACARIE	Maria MIROIU
Gheorghe NISTOR	Antonio Mihail NUICĂ
Viorel PĂUN	Doru Anastasiu POPESCU
Marin POPESCU	Nicolae-Doru STĂNESCU
Alina Florentina ȘTEFAN	Cristina TUDOSE
Adrian ŢURCANU	Corneliu UDREA

Tehnoredactare computerizată: Mihail TĂNASE, e-mail: mihaimit@yahoo.it

Redacția: Departamentul Matematică-Informatică, Universitatea din Pitești, Str. Târgu din Vale, nr. 1, Pitești, tel. 0348453247, e-mail: revista.matinf@upit.ro

Forma digitală a revistei poate fi accesată la adresa: http://matinf.upit.ro

Publicată de: Editura Universității din Pitești, https://www.upit.ro/ro/relatii-cu-mediul-socio-economic/centre-suport/editura

Anul IV, Nr. 7, Noiembrie 2021

Cuprins

In memoriam: Lector univ. dr. Stelian-Corneliu Andronescu (1968-2021) 5

ARTICOLE ȘI NOTE DE MATEMATICĂ 7

F. Badea, C. Anghel

Asupra unei probleme pentru Evaluarea Națională 7

D. Mărghidanu

Means of ratios versus ratios of means 13

M.F. Dumitrescu

Trei aplicații ale Teoremei cosinusului 19

M. Chirciu

Asupra Problemei B84 din Crux Mathematicorum 23

L.M. Giugiuc

În legătură cu Problema M 115 27

ARTICOLE ȘI NOTE DE INFORMATICĂ 29

C. Bălcău

Complexitatea algoritmului de sortare rapidă (quicksort) 29

M.R. Găman, M. Miroiu

Concursul ,,Dräexlmaier IT Day", Ediția a III-a, 2021 39

MATEMATICĂ PENTRU PROGRAMATORI ȘI PROGRAMARE PENTRU MATEMATICIENI 44

N. Stăniloiu

Mulțimi legate 44

RUBRICA DE ROBOTICĂ ȘI MEDII GRAFICE DE PROGRAMARE 49

D.A. Popescu

Senzori tactili și motoare mari în Minstorms EV3 49

PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU EXAMENE 52

Teste pentru examenul de Evaluare Națională 52

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Științe ale naturii 65

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Matematică-Informatică 70

Teste pentru admiterea la facultate 76

Teste grilă pentru admiterea la facultate 79

PROBLEME DE INFORMATICĂ PENTRU EXAMENE 86
Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Matematică-Informatică 86

PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU CONCURSURI 95
Rezolvarea problemelor pentru liceu din MATINF nr. 5 95
Probleme propuse pentru liceu 111

PROBLEME DE INFORMATICĂ PENTRU CONCURSURI 115
Probleme propuse 115

In memoriam: Lector univ. dr. Stelian-Corneliu Andronescu (1968-2021)

În data de 25.10.2021 a plecat dintre noi, la vârsta de doar 53 de ani, domnul profesor Stelian-Corneliu Andronescu, membru remarcabil al comunității academice argeșene, de peste două decenii.

Departamentul Matematică-Informatică își exprimă regretul profund pentru pierderea domnului profesor, un matematician desăvârșit care a contribuit substanțial la dezvoltarea Catedrei de Matematică și a Departamentului Matematică-Informatică din Facultatea de Matematică-Informatică și Facultatea de Științe, Educație Fizică și Informatică din cadrul Universității din Pitești.

Prin activitatea desfășurată, domnul profesor Stelian-Corneliu Andronescu a fost un model de dascăl și cercetător, a călăuzit pașii a zeci de generații de studenți, contribuind la pregătirea științifică de nivel superior a acestora, oferind un adevărat model de rigoare și profesionalism și pentru colegii mai tineri din departament.

Domnul profesor Stelian-Corneliu Andronescu s-a născut la data de 15.06.1968 în județul Gorj. A absolvit școala generală în comuna natală, Baia de Fier, apoi Liceul teoretic din Novaci, participând cu succes la etapele naționale ale Olimpiadei de Matematică și concursului Gheorghe Țițeica. A urmat apoi cursurile Universității de Vest din Timișoara, Facultatea de Matematică-Informatică, specializarea Matematică, absolvind și studiile de masterat la aceeași facultate. A obținut doctoratul în matematică la Institutul de Matematică al Academiei Române în anul 2001, cu lucrarea „*Contribuții la studiul completării spectrale p-adice a numerelor algebrice*" având-l drept coordonator științific pe Acad. dr. docent Nicolae Popescu, unul dintre cei mai mari matematicieni români. Și-a început cariera ca preparator universitar (1996-1998) la Facultatea de Științe, Catedra de Matematică-Informatică din Universitatea din Pitești, continuând apoi asistent universitar (1998-2002) și lector universitar (2002-2021) la Facultatea de Matematică-Informatică, respectiv Facultatea de Științe, Educație Fizică și Informatică din cadrul Universității din Pitești. În această perioadă și-a dedicat priceperea, dăruirea și energia atât în activitatea didactică (a susținut cursuri și seminarii la mai multe discipline precum *Algebră, Complemente de algebră, Algebră computațională, Teoria numerelor, Analiză complexă,* etc.), cât și în activitatea științifică prin publicarea unor cărți și culegeri, a mai multor articole în reviste de cel mai înalt rang în cotarea ISI (*Open Mathematics, Rendiconti*

del Seminario Matematico della Università di Padova), precum și alte articole reprezentative în jurnale sau conferințe naționale și internaționale aferente domeniului matematică. De asemenea, domnul profesor a sprijinit și a contribuit pe deplin la dezvoltarea Revistei Departamentului de Matematică și Informatică *MATINF*, precum și a Revistei de matematică ,,*Marinescu-Ghemeci Octavian*", editată în colaborare cu Liceul ,,Ștefan Diaconescu" Potcoava.

În memoria tuturor, domnul profesor Stelian-Corneliu Andronescu rămâne așa cum a fost cunoscut și prețuit de studenți, masteranzi, doctoranzi, colegi din cadrul Universității și colaboratori naționali și internaționali: o personalitate distinsă, caracterizată printr-o impresionantă erudiție, seriozitate, colegialitate și un caracter deschis și generos, cu o conduită exemplară de cercetător și profesor.

Pentru departamentul nostru este o imensă lovitură, nu doar din punct de vedere profesional și științific, cât și - de fapt chiar mai ales - pe plan uman, sentimental, pentru că pierderea unui așa coleg și prieten drag nu poate fi cuantificată sau compensată. Cine ne va mai spune povești, în pauzele dintre ore, despre geniul lui Napoleon sau despre fotbalul din vremurile bune? Cine ne va mai descreți frunțile cu snoave din copilărie, precum aceea cu preotul buimac care, rugat de credincioși să vină la biserică pentru slujba de Înviere, le spune ,,Mergeți cu Domnul, o facem mâine"? Sau cu amintirile memorabile despre doi oameni pe care îi venera, tatăl (șef de ocol silvic) și conducătorul de doctorat. Lăudându-se acasă cu numărul de goluri înscrise, este întrebat de tată: ,,Cornele, dar Dudu știe? Ai grijă că deja l-ai depășit, să nu se supere pe tine". Iar academicianul Nicolae Popescu, însoțind prin anii 80 o delegație de matematicieni japonezi în trenul București-Craiova, când aceștia observă că toată localitatea traversată a intrat brusc în beznă, le prezintă următoarea explicație, lăsându-i muți de admirație pe vizitatori: ,,Acesta este un obicei la noi, ca la ora 20.00 să stingem cu toții lumina pentru a proteja resursele naturii". Și cine se va mai uita apoi la ceas și ne va spune că este fără un minut, deci trebuie să mergem la ore, pornind primul spre sala de curs?

Prin trecerea în neființă a domnului profesor Stelian-Corneliu Andronescu, matematica românească pierde un reprezentant de valoare, iar comunitatea academică argeșeană un profesor și un om de știință dăruit educației universitare, de înaltă calitate și profesionalism.

Dumnezeu să-l odihnească în pace!

Departamentul Matematică-Informatică, Universitatea din Pitești

ARTICOLE ȘI NOTE DE MATEMATICĂ

Asupra unei probleme pentru Evaluarea Națională [1]

Florea Badea [2] *și Costel Anghel* [3]

În Testul de antrenament numărul 1 pentru Evaluarea Națională 2021 a fost propusă următoarea problemă (Subiectul al III-a, Problema 4):

În Figura 1 este reprezentat un pătrat $ABCD$ și un triunghi isoscel AEB, dreptunghic în E, cu $AE = 4\sqrt{2}$ cm. Punctul F este simetricul punctului C față de punctul D.

a) Demonstrați că punctele E, A și F sunt coliniare.

b) Arătați că dacă $\{P\} = AC \cap DE$, atunci P este mijlocul segmentului $[DE]$.

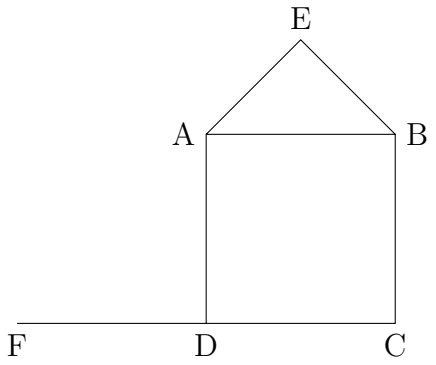


Figura 1

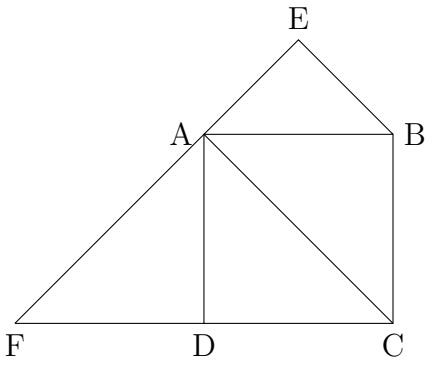


Figura 2

Vom rezolva problema în cazul general $AE = l\sqrt{2}$ cm, $l > 0$. Pentru cerința b) vom prezenta zece soluții. Primele șapte sunt de nivel gimnazial (șase sintetice și una analitică), iar ultimele trei de nivel liceal (una vectorială, alta folosind numere complexe și ultima analitică). Astfel dorim să evidențiem multitudinea de posibilități de abordare sintetică a problemelor de geometrie, eleganța acestor abordări, dar și eficiența abordărilor analitice, vectoriale sau algebrice, ce vor fi studiate în clasele de liceu.

De asemenea, vom enunța și demonstra și o extindere a problemei, considerând cazul când $ABCD$ este un dreptunghi iar triunghiul AEB este doar isoscel.

---

[1] Acest articol a fost comunicat la Simpozionul Județean de Matematică ,,Marinescu-Ghemeci Octavian", Ediția I, Potcoava, 8 mai 2021.

[2] Profesor, Școala Gimnazială ,,Nicolae Coculescu", Scornicești

[3] Profesor, Școala Gimnazială ,,Eugen Ionescu", Slatina, anghelcostel2012@yahoo.com

Soluția punctului a)

Triunghiurile AEB și ADF sunt dreptunghice isoscele, deci $\sphericalangle EAB = \sphericalangle DAF = 45°$ (vezi Figura 2). Astfel $\sphericalangle EAF = \sphericalangle EAB + \sphericalangle BAD + \sphericalangle DAF = 45° + 90° + 45° = 180°$, deci punctele E, A și F sunt coliniare.

O altă soluție este următoarea: [AC fiind bisectoarea $\sphericalangle BAD$, deducem că $AE \perp AC$ și $AF \perp AC$. Ținând cont de faptul că prin punctul A al dreptei AC se poate duce o singură perpediculară pe AC, rezultă că punctele E, A și F sunt coliniare.

În continuare vom prezenta zece soluții pentru punctul b).

Soluția 1

Notăm cu O centrul de simetrie al pătratului (vezi Figura 3). Avem, succesiv: $AE = l\sqrt{2}$, $AB = 2l$, $AC = BD = 2l\sqrt{2}$, $OD = l\sqrt{2}$. Din $\sphericalangle EAD + \sphericalangle ADO = 180°$ rezultă că dreptele AE și DO formează cu AD două unghiuri interne de aceeași parte a secantei suplementare, deci $AE \parallel DO$. Cum $AE = DO$, rezultă că $ADOE$ este paralelogram, deci P este mijlocul diagonalei $[DE]$.

Precizăm că aceasta este și soluția din baremul de notare elaborat de C.N.E.E.

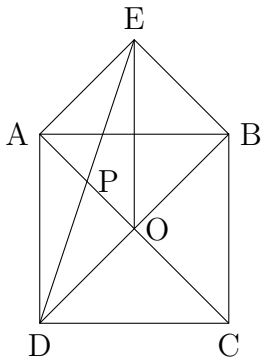


Figura 3

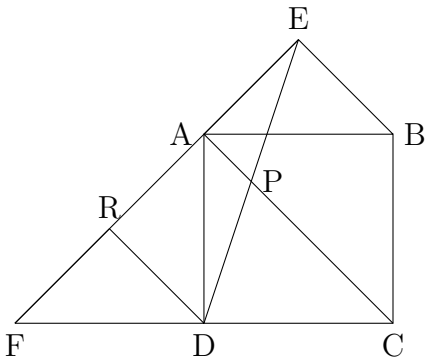


Figura 4

Soluția 2

Patrulaterul $AEBO$ are toate laturile congruente și $\sphericalangle AEB = 90°$, deci $AEBO$ este pătrat, deci $OP \parallel BE$ și cum O este mijlocul lui (BD) deducem că $[OP]$ este linie mijlocie în $\triangle DBE$. Prin urmare P este mijlocul lui $[DE]$.

Soluția 3

Ducem $DR \perp AF$, $R \in AF$ (vezi Figura 4). Conform punctului a), E, A și F sunt coliniare. $\triangle ADF$ este dreptunghic isoscel, $AD = DF = 2l$, deci DR fiind înălțime este și mediană. Prin urmare $AR = \dfrac{AF}{2} = \dfrac{2l\sqrt{2}}{2} = l\sqrt{2}$, deci $AR = AE$. Din $PA \perp EF$ și $DR \perp EF$ rezultă că $PA \parallel DR$. Din $AR = AE$ și $PA \parallel DR$ rezultă că PA este linie mijlocie în $\triangle EDR$, deci P este mijlocul lui $[DE]$.

Soluția 4

Fie M și N punctele de intersecție ale dreptei EO cu AB, respectiv CD (vezi Figura 5). Se deduce ușor că M și N sunt chiar mijloacele segmentelor $[AB]$, respectiv $[CD]$. Avem $EM = OM = ON = \dfrac{AB}{2} = l$, deci $OE = \dfrac{2}{3} \cdot EN$. Cum EN este mediană în $\triangle ECD$, deducem că O este centrul de greutate al $\triangle ECD$. Cum $O \in CP$, rezultă că și CP este mediană în $\triangle ECD$, deci P este mijlocul lui $[DE]$.

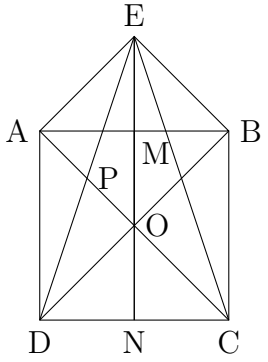


Figura 5

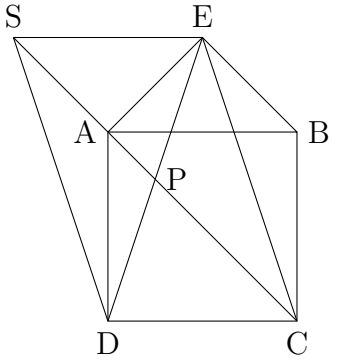


Figura 6

Soluția 5

Aplicăm *Teorema lui Menelaus* în $\triangle EDN$ cu transversala $P - O - C$ (vezi Figura 5) și obținem:

$$\frac{EP}{PD} \cdot \frac{DC}{CN} \cdot \frac{NO}{OE} = 1 \Rightarrow \frac{EP}{PD} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \frac{EP}{PD} = 1 \Rightarrow EP = PD,$$

deci P este mijlocul lui $[DE]$.

Soluția 6

Notăm cu S punctul în care paralela prin E la CD intersectează dreapta AC (vezi Figura 6). Deoarece $\sphericalangle EAC = \sphericalangle EAB + \sphericalangle BAC = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$ și $\sphericalangle AES = \sphericalangle EAB = 45^\circ$ (alterne interne), rezultă că $\triangle EAS$ este dreptunghic isoscel, deci $AE = AS$ și $ES = 2l = CD$. Din $ES \parallel CD$ și $ES = CD$ rezultă că $ESDC$ este paralelogram, deci P este mijlocul diagonalei $[DE]$.

Soluția 7

Considerăm sistemul de axe ortogonale xOy cu originea în centrul O al pătratului $ABCD$ și cu axele paralele cu laturile acestui pătrat, ca în Figura 7. Avem:

$$A\left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right),\ B\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right),\ C\left(\frac{l}{2}, -\frac{l}{2}\right),\ D\left(-\frac{l}{2}, -\frac{l}{2}\right),\ E(0, l).$$

Determinăm întâi funcția liniară $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ al cărei grafic este dreapta AC. Avem $f\left(-\dfrac{l}{2}\right) = \dfrac{l}{2}$ și $f\left(\dfrac{l}{2}\right) = -\dfrac{l}{2}$, de unde obținem că $b = 0$ și $a = -1$, deci $f(x) = -x$.

Determinăm acum funcția liniară $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=cx+d$ al cărei grafic este dreapta DE. Avem $g\left(-\frac{l}{2}\right)=-\frac{l}{2}$ și $g(0)=l$, de unde obținem că $d=l$ și $c=3$, deci $g(x)=3x+l$.

Punctul $P(x,y)$ fiind intersecția celor două drepte, avem $f(x)=g(x)$, de unde obținem că $x=-\frac{l}{4}$ și $y=f\left(-\frac{l}{4}\right)=\frac{l}{4}$, deci $P\left(-\frac{l}{4},\frac{l}{4}\right)$.

Rezultă că

$$x_P=\frac{x_D+x_E}{2},\ y_P=\frac{y_D+y_E}{2},$$

deci P este mijlocul lui $[DE]$.

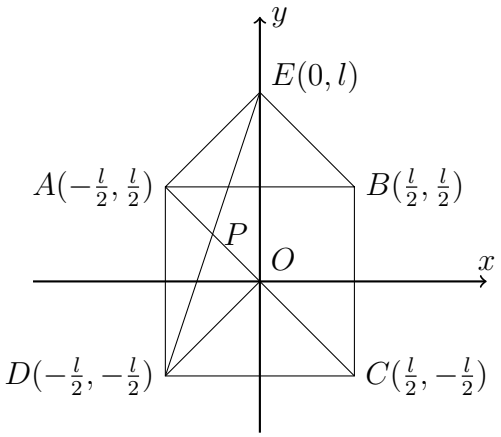


Figura 7

Soluția 8

Fixăm reperul vectorial $\left\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right\}$. Avem $\overrightarrow{OE}=-\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)=\frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)$ și $\overrightarrow{OA}=-\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)$, deci

$$\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OA}.$$

Rezultă că $AEOD$ este paralelogram, deci P este mijlocul diagonalei $[DE]$.

Această soluție poate fi rescrisă și folosind coordonatele vectorilor. Astfel, considerând sistemul de axe ortogonale xOy din Soluția 7 (vezi Figura 7), avem $\overrightarrow{OA}=-\frac{l}{2}\cdot\vec{i}+\frac{l}{2}\cdot\vec{j}$, $\overrightarrow{OD}=-\frac{l}{2}\cdot\vec{i}-\frac{l}{2}\cdot\vec{j}$ și $\overrightarrow{OE}=l\cdot\vec{j}$, deci din nou obținem că

$$\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OD}=l\cdot\vec{j}-\frac{l}{2}\cdot\vec{i}-\frac{l}{2}\cdot\vec{j}=-\frac{l}{2}\cdot\vec{i}+\frac{l}{2}\cdot\vec{j}=\overrightarrow{OA}.$$

Soluția 9

Considerăm din nou sistemul de axe ortogonale xOy din Soluția 7 (vezi Figura 7).

Numerele complexe care au afixele A, C, D și E sunt

$$z_A = \frac{l(-1+i)}{2},\ z_C = \frac{l(1-i)}{2},\ z_D = -\frac{l(1+i)}{2},\ z_E = li.$$

Fie P' mijlocul segmentului $[DE]$, deci

$$z_{P'} = \frac{z_D + z_E}{2} = \frac{l(-1+i)}{4}.$$

Avem

$$\frac{z_{P'} - z_A}{z_C - z_A} = \frac{l(1-i)}{4} \cdot \frac{2}{l(2-2i)} = \frac{1}{4} \in \mathbb{R}^*,$$

deci punctele A, P' și C sunt coliniare, adică $P' \in AC$.

Astfel $\{P'\} = AC \cap DE = \{P\}$, deci $P = P' =$ mijlocul lui $[DE]$.

O altă soluție bazată pe afixe este următoarea: deoarece

$$z_D + z_E = -\frac{l(1+i)}{2} + li = \frac{l(-1+i)}{2} = z_A = z_O + z_A,$$

rezultă că $ODAE$ este paralelogram, deci P este mijlocul diagonalei $[DE]$.

Soluția 10

Considerăm din nou sistemul de axe ortogonale xOy din Soluția 7 (vezi Figura 7).

Determinăm ecuația dreptei AC:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -\frac{l}{2} & \frac{l}{2} & 1 \\ \frac{l}{2} & -\frac{l}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + y = 0.$$

Determinăm și ecuația dreptei DE:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -\frac{l}{2} & -\frac{l}{2} & 1 \\ 0 & l & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3x - y + l = 0.$$

Punctul $P(x, y)$ fiind intersecția celor două drepte, obținem sistemul $\begin{cases} x + y = 0 \\ 3x - y + l = 0 \end{cases}$, având soluția $x = -\frac{l}{4}$, $y = \frac{l}{4}$, deci $P\left(-\frac{l}{4}, \frac{l}{4}\right)$. Astfel avem $x_P = \frac{x_D + x_E}{2}$ și $y_P = \frac{y_D + y_E}{2}$, deci P este mijlocul lui $[DE]$.

O problemă mai generală

Fie $ABCD$ un dreptunghi cu $AB = L$, $AD = l$ și AEB un triunghi isoscel cu vârful E situat de cealaltă parte a dreptei AB față de punctele C și D. Fie din nou P punctul de intersecție al dreptelor AC și DE.

a) Să se calculeze valoarea raportului $\dfrac{DP}{PE}$ în funcție de L, l și h, unde h este lungimea înălțimii din E a triunghiului AEB.

b) Să se determine, în funcție de L și l, lungimea comună a laturilor $[EA]$ și $[EB]$ pentru care punctul P este chiar mijlocul segmentului $[DE]$.

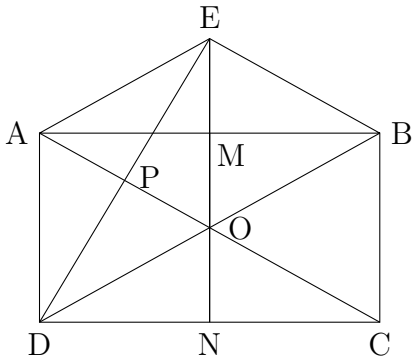


Figura 8

Soluție. Dintre soluțiile de mai sus, vom adapta relativ ușor Soluția 5. Fie, din nou, $\{O\} = AC \cap BD$, M mijlocul lui $[AB]$ și N mijlocul lui $[CD]$ (vezi Figura 8).

a) Aplicând *Teorema lui Menelaus* în $\triangle EDN$ cu transversala $P - O - C$ obținem:

$$\frac{EP}{PD} \cdot \frac{DC}{CN} \cdot \frac{NO}{OE} = 1 \Rightarrow \frac{EP}{PD} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{\dfrac{l}{2}}{\dfrac{l}{2} + h} = 1 \Rightarrow \frac{DP}{PE} = \frac{2l}{l + 2h},$$

deci raportul cerut nu depinde de L.

b) Folosind rezultatul de la punctul a), rezultă că P este mijlocul lui $[DE]$ dacă și numai dacă $\dfrac{2l}{l + 2h} = 1$, adică $h = \dfrac{l}{2}$.

Aplicând *Teorema lui Pitagora* în $\triangle EMA$ obținem:

$$EA = \sqrt{h^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{L^2 + l^2}}{2}.$$

Bibliografie

[1] `https://rocnee.eu/testeantrenament/`

Means of ratios versus ratios of means

Dorin Mărghidanu [1]

For two pairs of numerical sequences, the classical means of ratios and the ratios of classical means associated with those sequences are compared. The conditions when these comparisons can be made are also analyzed.

Given the positive real numbers $x_1, x_2, \ldots, x_n$ the following classical means are well known (see for example [3], [8]):

$$A_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) := \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k \quad (\textit{arithmetic mean} \text{ of numbers } x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$$G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) := \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \quad (\textit{geometric mean} \text{ of numbers } x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$$H_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) := \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}} \quad (\textit{harmonic mean} \text{ of numbers } x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

as well as the inequality between them,

$$A_n(x) \geq G_n(x) \geq H_n(x)$$

(and the equalities hold if and only if $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$).

Relative to two sequences of numbers $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ and $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, $a_i \geq 0$, $b_i > 0$, $\forall i = \overline{1, n}$, we are interested in comparing the means of the ratios $\frac{a_i}{b_i}$ with the ratios of the means associated with the given sequences, under possible additional conditions that must be fulfilled by the given numbers.

Remark 1. To this purpose, from the three classical means the most convenient is the geometric mean, for which we have (without other conditions imposed - apart from the positivity of the numbers $a_i \geq 0, b_i > 0$, $\forall i = \overline{1, n}$) the next obvious equality:

$$G_n\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{G_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{G_n(b_1, b_2, \ldots, b_n)}.$$

For the other two types of means, some additional conditions are required for the given number sequences, such as those related to the monotony of sequences. Let us mention here the following one.

[1]Profesor dr., Colegiul Național ,,Al. I. Cuza", Corabia, d.marghidanu@gmail.com

Definition 1 (synchrony/asynchrony)**.** *Two finite sequences* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *and* $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *of real numbers are called* ***synchronous*** *(or* ***similarly ordered****) if we have simultaneously:* $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ *and* $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$*, respectively* $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$ *and* $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n$ *(so if both sequences are simultaneously ascending or simultaneously descending, in other words if the two sequences have the same type of monotony). If the two sequences have inverse monotony we will call them* ***asynchronous*** *(or* ***inversely ordered****).*

Regarding the arithmetic mean, we can formulate the following result.

Proposition 1. *If* $a_i \geq 0, b_i > 0 \ \forall i = \overline{1,n}$ *are such that the sequences* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *and* $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *are asynchronous, then*

$$\frac{A_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{A_n(b_1, b_2, \ldots, b_n)} \leq A_n\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}\right).$$

The above inequality, even in a refined form (but apparently under slightly restricted conditions) was obtained by the author in [6], with the following statement:

Proposition 2. *If* $a_i \geq 0, b_i > 0$ *satisfies the relationship* $a_i + b_i = C, \forall\, i = \overline{1,n}$*,* $C \in \mathbb{R}$*, then*

$$\frac{A_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{A_n(b_1, b_2, \ldots, b_n)} \leq A_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot A_n\left(\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \ldots, \frac{1}{b_n}\right) \leq A_n\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}\right). \quad (1)$$

Proof. The inequality from the left holds even without the condition $a_i + b_i = C$. Indeed, using the inequality between the arithmetic mean and the harmonic mean, we have $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i}}{n} \geq \dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i}$. Hence, $A_n\left(\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \ldots, \frac{1}{b_n}\right) \geq \dfrac{1}{A_n(b_1, b_2, \ldots, b_n)}$. By multiplication with $A_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, the inequality on the left is obtained. Equality happens for $b_1 = b_2 = \ldots = b_n$.

To establish the inequality on the right, we will use *Cebyshev's Inequality*. Indeed, without loss of generality, we can assume that $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \quad \Leftrightarrow \quad C - a_1 \geq C - a_2 \geq \ldots \geq C - a_n \quad \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \quad b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{b_1} \leq \dfrac{1}{b_2} \leq \ldots \leq \dfrac{1}{b_n}$, so the sequences $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ and $\left(\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \ldots, \frac{1}{b_n}\right)$ are synchronous. By *Chebyshev's Inequality* $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{n} \cdot \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i}}{n} \leq \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \cdot \frac{1}{b_i}}{n}$, that is $A_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot A_n\left(\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \ldots, \frac{1}{b_n}\right) \leq A_n\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}\right)$, which complete the proof. □

A similar solution to the problem can be found in [6] (offered in the group of Nassim Nicholas Taleb).

Remark 2. The condition $a_i + b_i = C \ \forall\, i = \overline{1,n}$, $C \in \mathbb{R}$, occurs only to establish that the sequences $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ and $\left(\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \ldots, \frac{1}{b_n}\right)$ are similarly ordered. Obviously, it can be replaced from the beginning in the statement of Proposition 2 with the less restrictive condition that $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ and $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ to be inversely ordered. In this way it is possible to apply Chebyshev Inequality.

We are now able to establish similar results for harmonic mean.

Proposition 3. *If $a_i > 0$, $b_i > 0$, $\forall\, i = \overline{1,n}$ are such that the sequences $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ and $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ are asynchronous, then*

$$\frac{H_n(b_1, b_2, \ldots, b_n)}{H_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)} \geq H_n\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}\right). \tag{2}$$

The proof results here too from the refined form of this inequality captured in the following.

Proposition 4. *If $a_i \geq 0$, $b_i > 0$, $\forall\, i = \overline{1,n}$ are such that the sequences $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ and $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ are asynchronous, then*

$$\frac{H_n(b_1, b_2, \ldots, b_n)}{H_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)} \geq H_n\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}\right) \cdot H_n(b_1, b_2, \ldots, b_n) \geq H_n\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}\right). \tag{3}$$

Proof. With the substitutions $a_i \to \frac{1}{b_i}, b_i \to \frac{1}{a_i}$, $\forall\, i = \overline{1,n}$, (substitutions that keep the reverse - ordering of sequences), we have the following transformations:

$$A_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) \to \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{b_i}}{n} = \frac{1}{H_n(b_1, b_2, \ldots, b_n)}, \tag{4}$$

$$A_n(b_1, b_2, \ldots, b_n) \to \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}{n} = \frac{1}{H_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)}, \tag{5}$$

$$A_n\left(\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \ldots, \frac{1}{b_n}\right) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{b_i}}{n} \to \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{n} = \frac{1}{H_n\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}\right)}, \tag{6}$$

$$A_n\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}\right) \to A_n\left(\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \ldots, \frac{b_n}{a_n}\right) = \frac{1}{H_n\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}\right)}. \tag{7}$$

With the changes (4)-(7) in relation (1), it follows that

$$\frac{H_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{H_n(b_1, b_2, \ldots, b_n)} \leq \frac{1}{H_n(b_1, b_2, \ldots, b_n)} \cdot \frac{1}{H_n\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}\right)} \leq \frac{1}{H_n\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}\right)},$$

that is the double inequality (3) from the statement (that implies the inequality (2)). □

But what happens if the sequences of numbers $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ and $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ are not reverse - ordered (as in the statements above)? For the case in which the sequences are similarly ordered, we have:

Proposition 5. *If $a_i \geq 0$, $b_i > 0$, $\forall\, i = \overline{1,n}$ are such that the sequences $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ and $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ are similarly ordered, then*

$$A_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot A_n\left(\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \ldots, \frac{1}{b_n}\right) \geq \max\left(\frac{A_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{A_n(b_1, b_2, \ldots, b_n)}, A_n\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}\right)\right).$$

Proof. The inequality $A_n(a_1,a_2,\ldots,a_n)\cdot A_n\left(\frac{1}{b_1},\frac{1}{b_2},\ldots,\frac{1}{b_n}\right)\geq\frac{A_n(a_1,a_2,\ldots,a_n)}{A_n(b_1,b_2,\ldots,b_n)}$ is even the left inequality in (1) - which (we have seen) occurs even without any specific ordering condition.

Because the sequences $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ and $(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ are similarly ordered, it follows that the sequences $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ and $\left(\frac{1}{b_1},\frac{1}{b_2},\ldots,\frac{1}{b_n}\right)$ are inversely ordered, so by using *Chebishsev's Inequality* for this situation, we obtain $A_n(a_1,a_2,\ldots,a_n)\cdot A_n\left(\frac{1}{b_1},\frac{1}{b_2},\ldots,\frac{1}{b_n}\right)\geq A_n\left(\frac{a_1}{b_1},\frac{a_2}{b_2},\ldots,\frac{a_n}{b_n}\right)$. □

Remark 3. In general, the numbers $\frac{A_n(a_1,a_2,\ldots,a_n)}{A_n(b_1,b_2,\ldots,b_n)}$ and $A_n\left(\frac{a_1}{b_1},\frac{a_2}{b_2},\ldots,\frac{a_n}{b_n}\right)$ cannot be compared in the case of synchronous sequences. For example, for similarly ordered sequences $(a_1,a_2,a_3)=(1,2,3)$ and $(b_1,b_2,b_3)=(2,3,4)$, we will have

$$\frac{A_3(a_1,a_2,a_3)}{A_3(b_1,b_2,b_3)}=\frac{2}{3}=0{,}666...>A_3\left(\frac{a_1}{b_1},\frac{a_2}{b_2},\frac{a_3}{b_3}\right)=A_3\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4}\right)=0{,}638...,$$

while for similarly ordered sequences $(a_1,a_2,a_3)=(1,1,2)$ and $(b_1,b_2,b_3)=(1,2,2)$, we will have

$$\frac{A_3(a_1,a_2,a_3)}{A_3(b_1,b_2,b_3)}=\frac{4}{5}=0{,}8<A_3\left(\frac{a_1}{b_1},\frac{a_2}{b_2},\frac{a_3}{b_3}\right)=A_3\left(\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{2}{2}\right)=A_3\left(1,\frac{1}{2},1\right)=0{,}833....$$

If we explicitly express the means in relation (1) and multiply everywhere by n, we obtain:

Corollary 1. *If $a_i\geq 0$, $b_i>0$, $\forall\ i=\overline{1,n}$ are such that the sequences $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ and $(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ are asynchronous, then*

$$\begin{aligned}\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}&\leq\frac{1}{n^2}\cdot(a_1+a_2+\ldots+a_n)\cdot\left(\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\ldots+\frac{1}{b_n}\right)\\&\leq\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n}{b_n}\right).\end{aligned}\tag{8}$$

Remark 4. The inequality between the extremes in (1), written in the form

$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n}{b_n}\geq n\cdot\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n},\tag{9}$$

with $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ and $(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ $(a_i\geq 0,b_i>0,\ (\forall)i=\overline{1,n})$ asynchronous sequences, suggests the comparison with two other known inequalities for sums of fractions, namely *Bergström's Inequality* and *Radon's Inequality* (see [1], [2], [4], [5], [8]).

We recall here these fractional inequalities:

Proposition 6. *a) (Bergström's Inequality, 1952)*

If $n\in\mathbb{N}^\star$, $a_i\geq 0$, $b_i>0$, $\forall\ i=\overline{1,n}$, then

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n^2}{b_n}\geq\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{b_1+b_2+\ldots+b_n},$$

with equality if and only if $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}$;

b) (Radon's Inequality, 1913)

If $n\in\mathbb{N}^\star$, $a_i\geq 0$, $b_i>0$, $\forall\, i=\overline{1,n}$, $p\geq 0$, *then*

$$\frac{a_1^{p+1}}{b_1^p}+\frac{a_2^{p+1}}{b_2^p}+\ldots+\frac{a_n^{p+1}}{b_n^p}\geq\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^{p+1}}{(b_1+b_2+\ldots+b_n)^p},$$

with equality if and only if $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}$;

c) (Generalized Radon's Inequality, [4])

If $n\in\mathbb{N}^\star$, $a_i\geq 0$, $b_i>0$, $\forall\, i=\overline{1,n}$, $p\geq 0$, $r\geq p+1$, *then*

$$\frac{a_1^r}{b_1^p}+\frac{a_2^r}{b_2^p}+\ldots+\frac{a_n^r}{b_n^p}\geq\frac{1}{n^{r-p-1}}\cdot\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^r}{(b_1+b_2+\ldots+b_n)^p},\tag{10}$$

with equality if and only if $a_1=a_2=\ldots=a_n$ *and* $b_1=b_2=\ldots=b_n$.

Remark 5. Obviously, Bergström's Inequality is a particular case of Radon's Inequality, and both of these fractional inequalities are particular cases of Generalized Radon's Inequality.

Also, we observe that inequality (9) is obtained from an extension of the domain of powers in inequality (10) and for the case $r=p=1$, but with the requirement that the sequences $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ and $(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ to be asynchronous.

If the sequences $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ and $(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ are synchronous, from Proposition 5 we derive a comparison of the following kind (see also [7]):

Corollary 2. *If* $a_i\geq 0$, $b_i>0$, $\forall\, i=\overline{1,n}$ *are such that the sequences* $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ *and* $(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ *are similarly ordered, then*

$$\frac{1}{n}\cdot\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^n\frac{1}{b_i}\right)\geq\max\left(n\cdot\frac{\sum\limits_{i=1}^n a_i}{\sum\limits_{i=1}^n b_i},\sum_{i=1}^n\frac{a_i}{b_i}\right).$$

It would be interesting to investigate whether for other means - besides the classic ones considered here - can be compared the means of ratios and the ratios of means.

References

[1] Bătineţu-Giurgiu, D.M., Mărghidanu D., Pop T.O., *A generalization of Radon's inequality*, Creative Math. & Inf. 20, No. 2, 2011, pp. 111–116.

[2] Bătineţu-Giurgiu, D.M, Mărghidanu D., Pop T.O., *A refinement of a Radon type inequality*, Creative Math. & Inf. 27, No. 2, 2018, pp. 115–122.

[3] Bullen P.S., *Handbook of Means and Their Inequalities*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003.

[4] Mărghidanu D., *Generalizations and refinements for Bergström and Radon's Inequalities*, Journal of Sciences and Arts, Year 8, No. 1 (8), 2008, pp 57–62.

[5] Mărghidanu D., Díaz-Barrero J.L., Rădulescu S., *New Refinements of Some Classical Inequalities*, Mathematical Inequalities & Applications, Vol. 12, No. 3, 2009, pp 513–518.

[6] Mărghidanu D., *Proposed problem*, in Mathematical Inequalities, oct. 2020, https://www.facebook.com/photo/?fbid=3706838549375226&set=gm.2741321066155937.

[7] Mărghidanu D., *Proposed problem*, in Romanian Mathematical Magazine, oct. 2021, https://www.facebook.com/photo/?fbid=2959669187696205&set=gm.3042808952510030.

[8] Mitrinović D.S., Pecarić J.E., Fink A.M., *Classical and New Inequalities in Analysis*, Kluwer Acad. Press., 1993.

Trei aplicații ale Teoremei cosinusului [1]

Mihai Florea Dumitrescu [2]

Teorema cosinusului, al cărei enunț binecunoscut afirmă că *într-un triunghi oarecare pătratul unei laturi este egal cu suma pătratelor celorlalte două laturi minus de două ori produsul lor multiplicat cu cosinusul unghiului dintre ele*, este un rezultat de bază în obținerea și demonstrarea identităților și inegalităților geometrice și trigonometrice, dar și a unor inegalități algebrice în care apariția unor termeni de forma $\sqrt{a^2+kab+b^2}$ sugerează construirea unor triunghiuri în care acești termeni să fie lungimi de laturi. De exemplu, un termen de forma $\sqrt{a^2-ab+b^2}$ este lungimea laturii unui triunghi în care celelalte două laturi au lungimile a, respectiv b $(a,b>0)$ și formează un unghi având măsura de $60°$.

În continuare vom prezenta trei aplicații care exemplifică aceste posibilități de utilizare a *Teoremei cosinusului*.

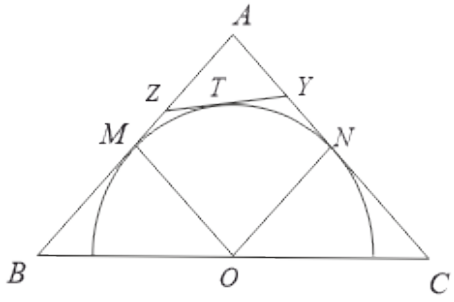
Aplicația 1 (Problema MGO 145 din RMGO, anul IV, nr. 1, 2020)**.** *În triunghiul ABC se înscrie un semicerc care are centrul pe latura BC și este tangent la laturile AB și AC. Se consideră punctele $Y\in[AC]$ și $Z\in[AB]$ astfel încât dreapta YZ să fie tangentă la semicerc. Fie $CY=y$ și $BZ=z$. Demonstrați că*

$$(b+c)^2yz=\left(b^2-c^2\right)(bz-cy)+a^2bc.$$

Francisco Javier García Capitán

Soluție.

Notăm cu M, N și T punctele de tangență ale semicercului la dreptele AB, AC, respectiv YZ, ca în figura alăturată. Notăm și $OM=r$, unde O este centrul cercului.



Evident, avem $OM\perp AB$ și $ON\perp AC$.

Deoarece $\mathcal{A}[ABC]=\mathcal{A}[AOB]+\mathcal{A}[AOC]$, rezultă că $\dfrac{bc\sin A}{2}=\dfrac{r\cdot b}{2}+\dfrac{r\cdot c}{2}$, deci

$$r=\frac{bc}{b+c}\cdot\sin A.$$

Avem $BM=OB\cos B=OM\operatorname{ctg}B$ și $CN=OC\cos C=ON\operatorname{ctg}C$.

[1] Acest articol a fost comunicat la Simpozionul Județean de Matematică ,,Marinescu-Ghemeci Octavian", Ediția I, Potcoava, 8 mai 2021.

[2] Profesor, Liceul ,,Ștefan Diaconescu", Potcoava, florin14mihai@yahoo.com

Astfel obținem $MZ = z - BM = z - OB\cos B = z - r\operatorname{ctg} B$ și, analog, $NY = y - r\operatorname{ctg} C$.

Prin urmare, avem

$$\begin{aligned} ZY = ZT + TY = MZ + NY &= y + z - r\left(\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C\right) = y + z - r \cdot \frac{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C} \\ &= y + z - r \cdot \frac{\sin\left(B + C\right)}{\cos B \cos C} \cdot \frac{\cos B \cos C}{\sin B \sin C} = y + z - r \cdot \frac{\sin A}{\sin B \sin C} \\ &= y + z - \frac{bc}{b + c} \cdot \sin A \cdot \frac{\sin A}{\frac{b}{a} \cdot \sin A \cdot \frac{c}{a} \cdot \sin A} \\ &= y + z - \frac{a^2}{b + c}. \end{aligned}$$

Aplicând *Teorema cosinusului* în triunghiurile ABC, respectiv AZY, avem:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \text{ respectiv } \cos A = \frac{\left(c - z\right)^2 + \left(b - y\right)^2 - \left(y + z - \dfrac{a^2}{b + c}\right)^2}{2\left(c - z\right)\left(b - y\right)}.$$

Obținem că

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\left(c - z\right)^2 + \left(b - y\right)^2 - \left(y + z - \dfrac{a^2}{b + c}\right)^2}{2\left(c - z\right)\left(b - y\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(b + c\right)^2 - 2bc - a^2}{2bc} = \frac{\left[\left(b + c\right) - \left(y + z\right)\right]^2 - 2\left(c - z\right)\left(b - y\right) - \left(y + z - \dfrac{a^2}{b + c}\right)^2}{2\left(c - z\right)\left(b - y\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(b + c\right)^2 - a^2}{bc} = \frac{\left[\left(b + c\right) - \left(y + z\right)\right]^2 - \left(y + z - \dfrac{a^2}{b + c}\right)^2}{\left(c - z\right)\left(b - y\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(b + c\right)^2 - a^2}{bc} = \frac{\dfrac{\left(b + c\right)^2 - a^2}{b + c} \cdot \left[b + c + \dfrac{a^2}{b + c} - 2\left(y + z\right)\right]}{\left(c - z\right)\left(b - y\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{bc} = \frac{b + c + \dfrac{a^2}{b + c} - 2\left(y + z\right)}{\left(b + c\right)\left(c - z\right)\left(b - y\right)}$$

$$\Leftrightarrow \left(b + c\right)^2\left(c - z\right)\left(b - y\right) = bc\left[\left(b + c\right)^2 + a^2 - 2\left(y + z\right)\left(b + c\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \left(b + c\right)^2\left[bc - \left(cy + bz\right) + yz\right] = bc\left[\left(b + c\right)^2 + a^2 - 2\left(y + z\right)\left(b + c\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \left(b + c\right)^2 yz = a^2bc + \left(b + c\right)^2\left(cy + bz\right) - 2bc\left(y + z\right)\left(b + c\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(b + c\right)^2 yz = a^2bc + \left(b^2 + 2bc + c^2\right)\left(cy + bz\right) - \left(y + z\right)\left(2b^2c + 2bc^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(b + c\right)^2 yz = a^2bc + b^3z + c^3y - b^2cy - bc^2z$$

$$\Leftrightarrow \left(b + c\right)^2 yz = \left(b^2 - c^2\right)\left(bz - cy\right) + a^2bc.$$

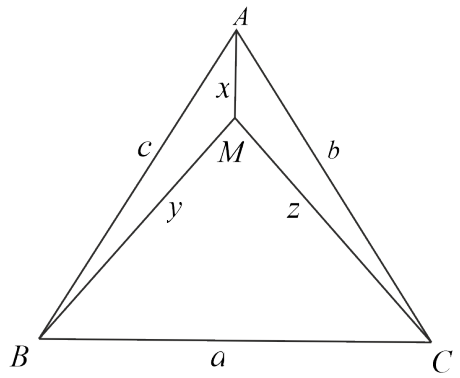
Aplicația 2. *Există un punct M situat în interiorul unui triunghi ABC, altul decât cel echilateral, cu $MA = x$, $MB = y$, $MC = z$, astfel încât:*

$$\sqrt{(y+z)^2 - a^2} + \sqrt{(z+x)^2 - b^2} + \sqrt{(x+y)^2 - c^2} = x + y + z \ ?$$

Leonard Giugiuc și *Kadir Altintas*

Soluție.

Considerăm un triunghi isoscel ABC, $AB = AC$ având $\sphericalangle BAC$ cu măsura mai mică decât $60°$ și alegem un punct M interior triunghiului ABC, astfel încât $a = y = z$ și $\sphericalangle AMB = \sphericalangle AMC = 150°$, ca în figura alăturată.



Aplicând *Teorema cosinusului* în triunghiul AMC, avem

$$b^2 = a^2 + x^2 + \sqrt{3}ax.$$

Înlocuim în egalitatea dorită, ținând cont că $b = c$:

$$\sqrt{3}a + 2\sqrt{ax\left(2-\sqrt{3}\right)} = 2a + x, \text{ adică } \left[\sqrt{a\left(2-\sqrt{3}\right)} - \sqrt{x}\right]^2 = 0.$$

Se obține $x = a\left(2-\sqrt{3}\right)$ și astfel $b = a\sqrt{5-2\sqrt{3}}$.

Aplicația 3 (Problema B61 din Crux Mathematicorum, Vol 46, No. 10 (Dec. 2020))**.** *Fie a, b, c numere reale pozitive. Demonstrați inegalitatea*

$$\sqrt{a^2c^2 - abc + b^2} + \sqrt{b^2c^2 - abc + a^2} \geq \sqrt{a^2 + ab + b^2}.$$

Când are loc egalitatea?

Leonard Giugiuc

Soluție. Cazul 1. $a = b$. Atunci inegalitatea din enunț devine $2\sqrt{a^2c^2 - a^2c + a^2} \geq \sqrt{3a^2}$, adică $\sqrt{c^2 - c + 1} \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, inegalitate evident adevărată. Egalitatea are loc numai pentru $c = \dfrac{1}{2}$.

Cazul 2. $a \neq b$. Fără a restrânge generalitatea, presupunem că $a < b$. Considerăm un triunghi ABC cu $\sphericalangle ACB = 120°$, $BC = a$ și $AC = b$, ca în figurile de mai jos.

Aplicând *Teorema cosinusului* obținem

$$AB = \sqrt{a^2 + ab + b^2}.$$

Fie $[CP$ bisectoarea unghiului ACB, $P \in (AB)$. Aplicând *Formula lungimii bisectoarei într-un triunghi*,

$$CP^2 = \frac{4ab}{(a+b)^2} \cdot p\,(p - AB)\,,$$

unde $p = \dfrac{a+b+AB}{2}$, deci $p\,(p-AB) = \dfrac{(a+b)^2 - AB^2}{4} = \dfrac{ab}{4}$, rezultă că

$$CP = \frac{ab}{a+b}.$$

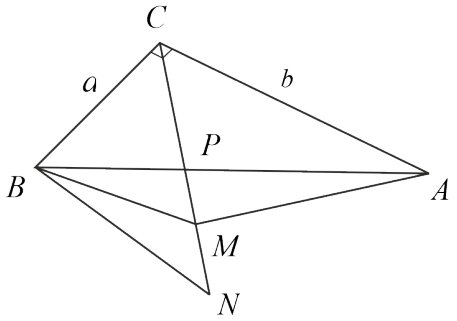
Fie punctele M și N pe semidreapta (CP astfel încât $CM = ac$ și $CN = bc$, deci $CM < CN$. Aplicând *Teorema cosinusului* în triunghiurile ACM, respectiv BCN obținem

$$AM = \sqrt{a^2c^2 - abc + b^2}, \text{ respectiv } BN = \sqrt{b^2c^2 - abc + a^2}.$$

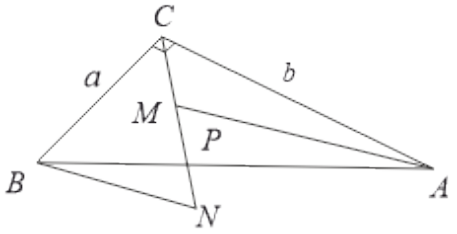
Din $a < b$ rezultă $\sphericalangle BAC < \sphericalangle ABC$, deci $\sphericalangle BPC < \sphericalangle APC$. Astfel $\sphericalangle APC$ este obtuz.

Deosebim subcazurile:

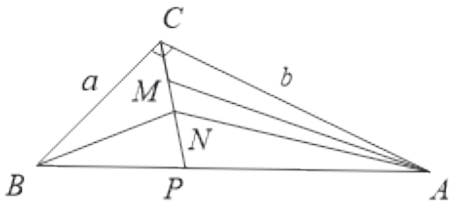
a) $CP \leq CM$ (vezi figura alăturată), adică $c \geq \dfrac{b}{a+b}$. Atunci $\sphericalangle BPN$ este obtuz. Dar $\sphericalangle BMN = \sphericalangle BPN + \sphericalangle PBM$, deci și $\sphericalangle BMN$ este obtuz, de unde $BN > BM$. Astfel $AM + BN > AM + BM \geq AB$.



b) $CM < CP < CN$ (vezi figura alăturată), adică $\dfrac{a}{a+b} < c < \dfrac{b}{a+b}$. Acum unghiurile $\sphericalangle APM$ și $\sphericalangle BPN$ sunt congruente și obtuze, deci $AM > AP$ și $BN > BP$. Astfel $AM + BN > AP + BP = AB$.



c) $CP \geq CN$ (vezi figura alăturată), adică $c \leq \dfrac{a}{a+b}$. Acum $\sphericalangle APM$ este obtuz. Dar $\sphericalangle ANM = \sphericalangle APM + \sphericalangle PAN$, deci și $\sphericalangle ANM$ este obtuz, de unde $AM > AN$. Astfel $AM + BN > AN + BN \geq AB$.



În fiecare dintre cele trei subcazuri am obținut că

$$AM + BN > AB.$$

adică are loc inegalitatea din enunț, chiar strictă!

Demonstrația inegalității este astfel încheiată, iar egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b$ și $c = \dfrac{1}{2}$.

Bibliografie

[1] L. Giugiuc, *Problem B61*, Crux Mathematicorum, Vol. 46 (2020), No. 10.

[2] F.J. García Capitán, *Problema MGO 145*, RMGO, anul IV (2020), nr. 1.

Asupra Problemei B84 din Crux Mathematicorum

Marin Chirciu [1]

Articolul pornește de la Problema B84 din Crux Mathematicorum, June 2021 (rubrica Bonus Problems), propusă de George Apostolopoulos.

Vom demonstra inegalitatea propusă, o vom întări și apoi vom face dezvoltări cu inegalități din aceeași clasă de probleme cu înălțimi și raze ale cercurilor exînscrise unui triunghi.

Vom utiliza următorul rezultat.

Lema 1. *În orice* ΔABC *avem:* $\sum \frac{r_b+r_c}{h_b+h_c}=\frac{R\left(p^2+5r^2+8Rr\right)}{r\left(p^2+r^2+2Rr\right)}$.

Demonstraţie. Folosind $r_a=\frac{S}{p-a}$ și $h_a=\frac{2S}{a}$ obținem:

$$\sum \frac{r_b+r_c}{h_b+h_c}=\sum \frac{\frac{S}{p-b}+\frac{S}{p-c}}{\frac{2S}{b}+\frac{2S}{c}}=\frac{1}{2}\sum \frac{abc}{(b+c)(p-b)(p-c)}=\frac{abc}{2}\cdot\frac{\sum (a+b)(a+c)(p-a)}{\prod (b+c)\prod (p-a)}$$

$$=\frac{4Rrp}{2}\cdot\frac{p^2\left(p^2+5r^2+8Rr\right)}{2p\left(p^2+r^2+2Rr\right)\cdot pr^2}=\frac{R\left(p^2+5r^2+8Rr\right)}{r\left(p^2+r^2+2Rr\right)}. \qquad \square$$

Să trecem la rezolvarea problemei menționate.

Aplicația 1 (Problema B84 din Crux Mathematicorum, Vol 47, No. 6 (June 2021))**.** *Let* h_a,h_b,h_c *be the altitudes,* r_a,r_b,r_c *the exradii,* r *the inradius, and* R *the circumradius of a triangle* ABC*. Prove that*

$$\frac{r_a+r_b}{\sqrt{h_a^2+h_b^2}}+\frac{r_b+r_c}{\sqrt{h_b^2+h_c^2}}+\frac{r_c+r_a}{\sqrt{h_c^2+h_a^2}}\leq 3\sqrt{2}\left(\frac{R}{2r}\right)^2.$$

George Apostolopoulos

Soluție. Avem:

$$\sum \frac{r_b+r_c}{\sqrt{h_b^2+h_b^2}}\leq \sum \frac{r_b+r_c}{\sqrt{\frac{(h_b+h_c)^2}{2}}}=\sqrt{2}\sum \frac{r_b+r_c}{h_b+h_c}\overset{(*)}{\leq} 3\sqrt{2}\left(\frac{R}{2r}\right)^2,$$

unde $(*)\Leftrightarrow \sum \frac{r_b+r_c}{h_b+h_c}\leq 3\left(\frac{R}{2r}\right)^2 \overset{\text{Lema 1}}{\Longleftrightarrow} \frac{R\left(p^2+5r^2+8Rr\right)}{r\left(p^2+r^2+2Rr\right)}\leq 3\left(\frac{R}{2r}\right)^2\Leftrightarrow \frac{p^2+5r^2+8Rr}{p^2+r^2+2Rr}\leq \frac{3R}{4r}\Leftrightarrow 4r\left(p^2+5r^2+8Rr\right)\leq 3R\left(p^2+r^2+2Rr\right)\Leftrightarrow p^2(3R-4r)+r\left(6R^2-29Rr-20r^2\right)\geq 0$, deci folosind *Inegalitatea lui Gerretsen* $p^2\geq 16Rr-5r^2$ este suficient să arătăm că:

$$\left(16Rr-5r^2\right)(3R-4r)+r\left(6R^2-29Rr-20r^2\right)\geq 0\Leftrightarrow$$

[1]Profesor, Colegiul Național ,,Zinca Golescu", Pitești, marin.chirciu@yahoo.com

$(16R-5r)(3R-4r)+(6R^2-29Rr-20r^2)\geq 0 \Leftrightarrow 54R^2-108Rr\geq 0 \Leftrightarrow R\geq 2r$ $(Euler)$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Inegalitatea poate fi întărită astfel:

Aplicația 2. *În orice* ΔABC *avem:* $\sum \frac{r_b+r_c}{\sqrt{h_b^2+h_b^2}}\leq 3\sqrt{2}\cdot\frac{R}{2r}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție. Avem:

$$\sum \frac{r_b+r_c}{\sqrt{h_b^2+h_b^2}}\leq \sum \frac{r_b+r_c}{\sqrt{\frac{(h_b+h_c)^2}{2}}}=\sqrt{2}\sum\frac{r_b+r_c}{h_b+h_c}\overset{(*)}{\leq} 3\sqrt{2}\cdot\frac{R}{2r},$$

unde $(*)\Leftrightarrow \sum\frac{r_b+r_c}{h_b+h_c}\leq 3\cdot\frac{R}{2r}\overset{\text{Lema 1}}{\Longleftrightarrow}\frac{R\left(p^2+5r^2+8Rr\right)}{r\left(p^2+r^2+2Rr\right)}\leq 3\cdot\frac{R}{2r}\Leftrightarrow\frac{p^2+5r^2+8Rr}{p^2+r^2+2Rr}\leq\frac{3}{2}\Leftrightarrow$ $2\left(p^2+5r^2+8Rr\right)\leq 3\left(p^2+r^2+2Rr\right)\Leftrightarrow p^2\geq 10Rr+7r^2$, deci folosind din nou *Inegalitatea lui Gerretsen* $p^2\geq 16Rr-5r^2$ este suficient să arătăm că:

$$16Rr-5r^2\geq 10Rr+7r^2\Leftrightarrow R\geq 2r\ (Euler).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Astfel, obținem următoarele inegalități:

Aplicația 3. *În orice* ΔABC *avem:* $\sum \frac{r_b+r_c}{\sqrt{h_b^2+h_b^2}}\leq 3\sqrt{2}\cdot\frac{R}{2r}\leq 3\sqrt{2}\left(\frac{R}{2r}\right)^2$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție. Prima inegalitate este chiar Aplicația 2, iar a doua inegalitate rezultă imediat din *Inegalitatea lui Euler* $R\geq 2r$. Egalitățile au loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Să schimbăm acum între ele r_a cu h_a. Folosim următorul rezultat.

Lema 2. *În orice* ΔABC *avem:* $\sum\frac{h_b+h_c}{r_b+r_c}=\frac{2(R+r)}{R}$.

Demonstraţie. Folosind $r_a=\frac{S}{p-a}$ și $h_a=\frac{2S}{a}$ obținem:

$$\sum\frac{h_b+h_c}{r_b+r_c}=\sum\frac{\frac{2S}{b}+\frac{2S}{c}}{\frac{S}{p-b}+\frac{S}{p-c}}=\frac{2}{abc}\sum(b+c)(p-b)(p-c)=\frac{2}{4Rrp}\cdot 4pr(R+r)=\frac{2(R+r)}{R}.$$

□

Aplicația 4. *În orice* ΔABC *avem:* $\sum\frac{h_b+h_c}{\sqrt{r_b^2+r_b^2}}\leq 3\sqrt{2}\left(\frac{R}{2r}\right)^2$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție. Avem:

$$\sum \frac{h_b+h_c}{\sqrt{r_b^2+r_b^2}} \leq \sum \frac{h_b+h_c}{\sqrt{\frac{(r_b+r_c)^2}{2}}} = \sqrt{2}\sum \frac{h_b+h_c}{r_b+r_c} \overset{(*)}{\leq} 3\sqrt{2}\left(\frac{R}{2r}\right)^2,$$

unde $(*) \Leftrightarrow \sum \frac{h_b+h_c}{r_b+r_c} \leq 3\left(\frac{R}{2r}\right)^2 \overset{\text{Lema 2}}{\Longleftrightarrow} \frac{2(R+r)}{R} \leq 3\left(\frac{R}{2r}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{2(R+r)}{R} \leq \frac{3R^2}{4r^2} \Leftrightarrow 3R^3 \geq 8r^2(R+r) \Leftrightarrow 3R^3-8Rr^2-8r^3 \geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)(3R^2+6Rr+4r^2) \geq 0$, evident din $R \geq 2r$ (*Euler*). Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Și această inegalitate poate fi întărită:

Aplicația 5. *În orice* ΔABC *avem:* $\sum \frac{h_b+h_c}{\sqrt{r_b^2+r_b^2}} \leq 3\sqrt{2}\cdot\frac{R}{2r}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție. Avem:

$$\sum \frac{h_b+h_c}{\sqrt{r_b^2+r_b^2}} \leq \sum \frac{h_b+h_c}{\sqrt{\frac{(r_b+r_c)^2}{2}}} = \sqrt{2}\sum \frac{h_b+h_c}{r_b+r_c} \overset{(*)}{\leq} 3\sqrt{2}\cdot\frac{R}{2r},$$

unde $(*) \Leftrightarrow \sum \frac{h_b+h_c}{r_b+r_c} \leq 3\cdot\frac{R}{2r} \overset{\text{Lema 2}}{\Longleftrightarrow} \frac{2(R+r)}{R} \leq \frac{3R}{2r} \Leftrightarrow 3R^2 \geq 4r(R+r) \Leftrightarrow 3R^2-4Rr-4r^2 \geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)(3R+2r) \geq 0$, evident din $R \geq 2r$ (*Euler*).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Mai mult, și această inegalitate poate fi întărită:

Aplicația 6. *În orice* ΔABC *avem:* $\sum \frac{h_b+h_c}{\sqrt{r_b^2+r_b^2}} \leq 3\sqrt{2}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție. Avem:

$$\sum \frac{h_b+h_c}{\sqrt{r_b^2+r_b^2}} \leq \sum \frac{h_b+h_c}{\sqrt{\frac{(r_b+r_c)^2}{2}}} = \sqrt{2}\sum \frac{h_b+h_c}{r_b+r_c} \overset{(*)}{\leq} 3\sqrt{2},$$

unde $(*) \Leftrightarrow \sum \frac{h_b+h_c}{r_b+r_c} \leq 3 \overset{\text{Lema 2}}{\Longleftrightarrow} \frac{2(R+r)}{R} \leq 3 \Leftrightarrow 2(R+r) \leq 3R \Leftrightarrow R \geq 2r$ (*Euler*).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Astfel, obținem următoarele inegalități:

Aplicația 7. *În orice* ΔABC *avem:* $\sum \frac{h_b+h_c}{\sqrt{r_b^2+r_b^2}} \leq 3\sqrt{2} \leq 3\sqrt{2}\cdot\frac{R}{2r} \leq 3\sqrt{2}\left(\frac{R}{2r}\right)^2$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție. Prima inegalitate este chiar Aplicația 6, iar celelalte două inegalități rezultă imediat din *Inegalitatea lui Euler* $R \geq 2r$. Egalitățile au loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

La final, stabilim o inegalitate între sumele $\sum \frac{h_b + h_c}{r_b + r_c}$ și $\sum \frac{r_b + r_c}{h_b + h_c}$.

Aplicația 8. *În orice* ΔABC *avem:* $\sum \frac{h_b + h_c}{r_b + r_c} \leq \sum \frac{r_b + r_c}{h_b + h_c}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție. Folosind lemele de mai sus, inegalitatea se scrie:

$$\frac{2(R+r)}{R} \leq \frac{R\left(p^2+5r^2+8Rr\right)}{r\left(p^2+r^2+2Rr\right)} \Leftrightarrow 2r(R+r)\left(p^2+r^2+2Rr\right) \leq R^2\left(p^2+5r^2+8Rr\right) \Leftrightarrow$$

$$p^2\left(R^2-2Rr-2r^2\right)+r\left(8R^3+R^2r-6Rr^2-2r^3\right) \geq 0.$$

Distingem cazurile:

Cazul 1. Dacă $R^2-2Rr-2r^2 \geq 0$, atunci inegalitatea este evidentă, deoarece din *Inegalitatea lui Euler* $R \geq 2r$, avem $8R^3+R^2r-6Rr^2-2r^3 > 0$.

Cazul 2. Dacă $R^2-2Rr-2r^2 < 0$, atunci inegalitatea se rescrie:

$$r\left(8R^3+R^2r-6Rr^2-2r^3\right) \geq p^2\left(2r^2+2Rr-R^2\right),$$

deci folosind *Inegalitatea lui Gerretsen* $p^2 \leq 4R^2+4Rr+3r^2$ este suficient să arătăm că:

$$r\left(8R^3+R^2r-6Rr^2-2r^3\right) \geq \left(4R^2+4Rr+3r^2\right)\left(2r^2+2Rr-R^2\right)$$
$$\Leftrightarrow R^4+R^3r-3R^2r^2-5Rr^3-2r^4 \geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)\left(R^3+3R^2r+3Rr^2+r^3\right) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (R-2r)(R+r)^3 \geq 0,$$

care rezultă din $R \geq 2r$ (*Euler*).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Bibliografie

[1] G. Apostolopoulos, *Problem B84*, Crux Mathematicorum, Vol. 47 (2021), No. 6.

[2] O. Bottema, R.Z. Djordjevic, R.R. Janic, D.S. Mitrinovic, P.M. Vasic, *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1969.

[3] M. Chirciu, *Inegalități cu laturi și raze în triunghi, de la inițiere la performanță*, Editura Paralela 45, Pitești, 2017.

[4] M. Chirciu, *Inegalități cu linii importante în triunghi, de la inițiere la performanță*, Editura Paralela 45, Pitești, 2018.

[5] M. Chirciu, *Inegalități algebrice, de la inițiere la performanță*, Editura Paralela 45, Pitești, 2021.

[6] M. Chirciu, *Inegalități geometrice, de la inițiere la performanță*, Editura Paralela 45, Pitești, 2021.

În legătură cu Problema M 115

Leonard Mihai Giugiuc [1]

În numărul 4 al revistei MATINF (vezi [1]), autorul a propus, în regim semideschis, următoarea problemă (**M 115**):

Fie $a, b, c, d \geq 0$ *astfel încât* $a+b+c+d=4$.

a) Arătați că $a^2+b^2+c^2+d^2+8\left(\dfrac{abc+abd+acd+bcd}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \geq 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$.

Când are loc egalitatea?

b) (problemă deschisă) Există* $k > \dfrac{2}{3}$ *astfel încât inegalitatea*

$$a^2+b^2+c^2+d^2+8\left(\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}\right)^{k} \geq 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$

să fie adevărată pentru orice numere a, b, c, d *care îndeplinesc condițiile date? În caz afirmativ, determinați valorile lui* k.

În [2] este prezentată soluția dată de autor pentru prima cerință, deci nu vom insista asupra ei. În continuare vom demonstra problema deschisă, iar la final vom propune spre rezolvare o problemă de aceeași factură, în scopul consolidării de către cititori a noțiunilor și tehnicilor care apar în urma acestui demers.

Vom păstra notațiile și cazurile din [2]. Pentru $a=b=c=\dfrac{4}{3}$ și $d=0$, avem:

$$\left(\frac{16}{27}\right)^k \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow k\ln\left(\frac{16}{27}\right) \geq \ln\left(\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow k\left(\ln 27-\ln 16\right) \leq \ln 3-\ln 2 \Leftrightarrow k \leq \frac{\ln 3-\ln 2}{\ln 27-\ln 16}.$$

Demonstrăm întâi că inegalitatea este adevărată pentru $k=\dfrac{\ln 3-\ln 2}{\ln 27-\ln 16}$. Să remarcăm că $\dfrac{2}{3}<k<1$ și că, pe lângă cazurile de egalitate menționate în [2], mai apar cel puțin următoarele cazuri: $\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3},0\right)$ și permutările acestora.

Cazul 1. $t \in \left[0,\dfrac{1}{3}\right]$. Avem de arătat că $f(t) \geq 0$, unde $f(t)=(t+1)^{2k}(1-2t)^k+3t^2-1$.

Avem $f'(t)=6t\left[-k\cdot\dfrac{(t+1)^{2k-1}}{(1-2t)^{1-k}}+1\right]$, pentru orice $t \in \left[0,\dfrac{1}{3}\right]$. Să remarcăm că funcția $\varphi(t)=-k\cdot\dfrac{(t+1)^{2k-1}}{(1-2t)^{1-k}}+1$ este strict descrescătoare pe intervalul $\left[0,\dfrac{1}{3}\right]$. De aici deducem că

[1]Profesor, Colegiul Național ,,Traian", Drobeta Turnu Severin, leonardgiugiuc@yahoo.com

$\min\limits_{t\in\left[0,\frac{1}{3}\right]} f(t) \in \left\{f(0), f\left(\frac{1}{3}\right)\right\}$. Dar $f(0) = f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$, deci $f(t) \geq 0$ pentru orice $t \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$. Demonstrația este încheiată în acest caz.

Cazul 2. $t \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$. Avem $a^2+b^2+c^2+d^2+8\left(\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}\right)^k$

$$= a^2+b^2+c^2+d^2+8\left(\frac{4}{a+b+c+d}\right)^{3k-2}\left(\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}\right)^k$$

$$= a^2+b^2+c^2+d^2+2^{4k-1}\cdot\frac{(abc+abd+acd+bcd)^k}{(a+b+c+d)^{3k-2}}.$$

Deci pentru α și β menționate în [2], rămâne de arătat că $\beta^2+2^{4k-1}\cdot\frac{\alpha^{2k}\beta^k}{(2\alpha+\beta)^{3k-2}} \geq 4\alpha\beta$.

Notăm $\frac{\beta}{\alpha} = x \in [0,1]$ și ultima inegalitate devine $x^2+2^{4k-1}\cdot\frac{x^k}{(x+2)^{3k-2}} \geq 4x$. Cum $x \geq 0$, este suficient să arătăm că $x^{2-k}+2^{4k-1}\cdot\frac{1}{(x+2)^{3k-2}} \geq 4x^{1-k}$, i.e. $x^{1-k}(x+2)^{3k-2}(4-x) \leq 2^{4k-1}$.

Fie funcția $g(x) = x^{1-k}(x+2)^{3k-2}(4-x)$ pe intervalul $[0,1]$. Evident, g este continuă pe $[0,1]$ și derivabilă pe $(0,1]$. Avem $g'(x) = 2x^{-k}(x+2)^{3k-3}(1-x)(kx+4-4k) \geq 0, \forall x \in (0,1]$. Astfel g este strict crescătoare, deci $\max\limits_{x\in[0,1]} g(x) = 2^{4k-1}$. Demonstrația este completă.

Cazurile de egalitate sunt: $(1,1,1,1)$, $(2,2,0,0)$ și permutările, $\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3},0\right)$ și permutările.

Acum demonstrăm că inegalitatea are loc pentru orice $k \in \left(\frac{2}{3}, \frac{\ln 3-\ln 2}{\ln 27-\ln 16}\right]$.

Într-adevăr, conform *Inegalității MacLaurin*, $\frac{abc+abd+acd+bcd}{4} \leq \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^3 = 1$, deci $\left(\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}\right)^k \geq \left(\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}\right)^{\frac{\ln 3-\ln 2}{\ln 27-\ln 16}}$.

Prin urmare inegalitatea este adevărată pentru orice $k \in \left(\frac{2}{3}, \frac{\ln 3-\ln 2}{\ln 27-\ln 16}\right]$.

Lăsăm în seama cititorilor demonstrarea următorului rezultat:

Dacă a, b, c și d sunt numere reale nenegative astfel încât $ab+ac+ad+bc+bd+cd = 6$, atunci $a^2+b^2+c^2+d^2+8\left(\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}\right)^k \geq 12$, unde $k \in \left(0, \log_2\frac{16}{9}\right]$.

Bibliografie

[1] http://matinf.upit.ro/MATINF4/index.html#p=89

[2] http://matinf.upit.ro/MATINF6/index.html#p=87

ARTICOLE ȘI NOTE DE INFORMATICĂ

Complexitatea algoritmului de sortare rapidă (quicksort)

Costel Bălcău [1]

Algoritmul de sortare rapidă (quicksort), inventat de către celebrul informatician britanic Sir Charles Antony Richard Hoare în anul 1959, este considerat - în urma experienței practice - ca fiind cel mai performant algoritm de sortare.

În articolul de față vom analiza complexitatea și optimalitatea acestui algoritm, utilizând rezultate din teoria algoritmilor privind ordinele de complexitate și complexitatea algoritmilor de sortare prezentate în [2], [3], [4] și tehnici matematice de rezolvare a relațiilor de recurență.

Descrierea algoritmului

Pentru a sorta crescător un vector dat $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $n \geq 1$, **algoritmul de sortare rapidă** (**quicksort**) utilizează următorul procedeu specific metodei de programare *Divide et Impera*:

- Se alege un element, de exemplu $x = a_1$, care se duce, prin interschimbări succesive, pe o poziție k, astfel încât după această etapă să avem $a_k = x$ și

$$a_i \leq a_k \leq a_j, \ \forall\, i, j \text{ cu } 1 \leq i < k < j \leq n.$$

  Acest element, devenit acum elementul a_k, se numește **pivot** și are proprietatea că a ajuns pe poziția sa finală în vectorul sortat, deoarece subvectorul $(a_1, \ldots, a_{k-1})$ al elementelor din stânga sa conține doar elemente mai mici sau egale cu el, iar subvectorul $(a_{k+1}, \ldots, a_n)$ al elementelor din dreapta sa conține doar elemente mai mari sau egale cu el. Acești doi subvectori se numesc **partițiile** în care pivotul a_k împarte vectorul.

  Pentru realizarea acestei etape putem proceda astfel:

  - se compară succesiv elementul ales, $x = a_1$, cu elementele din dreapta (marginea opusă) a_n, $a_{n-1}, \ldots$, iar când se ajunge la un element a_u cu $a_1 > a_u$ atunci se interschimbă $x = a_1$ cu a_u;
  - se compară apoi succesiv $x = a_u$ cu elementele neanalizate din stânga (marginea opusă) a_2, $a_3, \ldots$, iar când se ajunge la un element a_p cu $a_p > a_u$ atunci se interschimbă $x = a_u$ cu a_p;
  - se compară apoi din nou $x = a_p$ cu elementele neanalizate din dreapta (marginea opusă) a_{u-1}, $a_{u-2}, \ldots$, iar când se ajunge la un nou element a_u cu $a_p > a_u$ atunci se interschimbă $x = a_p$ cu noul a_u;

[1] Conf. univ. dr., Universitatea din Pitești, cbalcau@yahoo.com

  - se compară apoi din nou $x = a_u$ cu elementele neanalizate din stânga (marginea opusă) a_{p+1}, $a_{p+2}, \ldots$, iar când se ajunge la un nou element a_p cu $a_p > a_u$ atunci din nou se interschimbă $x = a_u$ cu noul a_p;
  - se continuă acest procedeu cât timp subsecvența $(a_p, \ldots, a_u)$ formată din x, care este a_p sau a_u, și elemente rămase neanalizate verifică inegalitatea $p < u$, adică are cel puțin două elemente;
  - la final se ajunge ca $p = u$ și astfel $x = a_p = a_u$, deci $k = p = u$ este poziția pivotului x și procedeul de partiționare (determinarea poziției pivotului și astfel a celor două partiții în care acesta împarte vectorul) este încheiat.

- Se sortează crescător cele două partiții $(a_1, \ldots, a_{k-1})$ și $(a_{k+1}, \ldots, a_n)$, prin același procedeu, dacă au cel puțin două elemente. Partițiile vide și cele care au un singur element sunt, bineînțeles, deja sortate.

Observația 1. Spre deosebire de *algoritmul mergesort*, unde împărțirea vectorului în doi subvectori (*etapa „Divide"* din strategia Divide et Impera) se realiza instantaneu prin intermediul elementului median, la sortarea rapidă această etapă necesită rearanjarea elementelor pentru a obține pivotul a_k și cele două partiții. Pe de altă parte, după sortarea independentă a celor două partiții vectorul A va fi acum sortat, spre deosebire de algoritmul mergesort, unde după sortarea celor doi subvectori urma interclasarea lor (*etapa „Combină"* din strategia Divide et Impera, care astfel nu mai este necesară la algoritmul quicksort).

Descrierea în pseudocod a algoritmului are următoarea formă.

QUICKSORT(A, p, u)**:** // sortarea secvenței $(a_p, \ldots, a_u)$
if $p < u$ **then**
  $k \leftarrow$**PIVOT**(A, p, u); // se determină, rearanjând elementele, // poziția k a pivotului
  QUICKSORT$(A, p, k-1)$; // sortarea partiției $(a_p, \ldots, a_{k-1})$
  QUICKSORT$(A, k+1, u)$; // sortarea partiției $(a_{k+1}, \ldots, a_u)$

unde procedura de partiționare este:

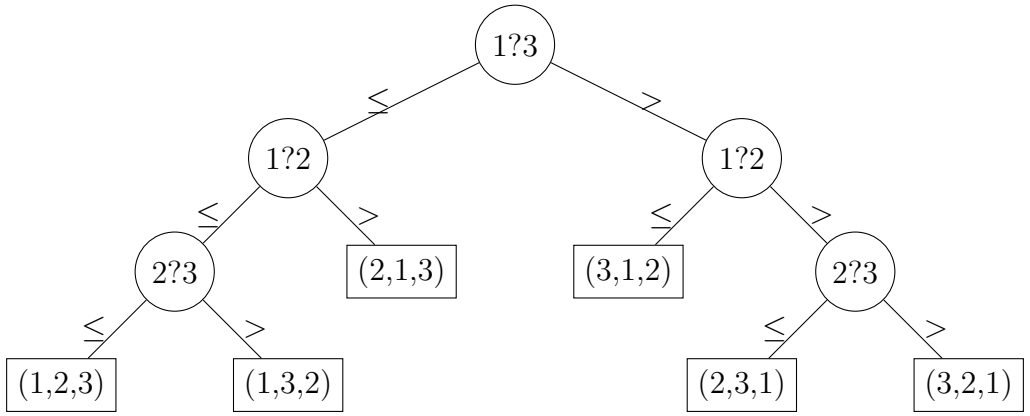
PIVOT(A, p, u)**:**
$d \leftarrow 0$; // $d =$ pasul de deplasare spre dreapta a lui p
// $1 - d =$ pasul de deplasare spre stânga a lui u
// $d = 0$ corespunde deplasării lui u (marginea din dreapta), iar
// $d = 1$ corespunde deplasării lui p (marginea din stânga)
while $p < u$ **do**
  if $A[p] > A[u]$ **then**
    $A[p] \leftrightarrow A[u]$; // interschimbare
    $d \leftarrow 1 - d$; // se comută marginea unde se face deplasarea
  $p \leftarrow p + d$; $u \leftarrow u - 1 + d$; // deplasarea marginii corespunzătoare
// s-a ajuns la $p = u =$ poziția pivotului
return p;

Apel:

QUICKSORT$(A, 1, n)$ // pentru sortarea întregului vector $A = (a_1, \ldots, a_n)$.

Observația 2. În procedura de partiționare **PIVOT**(A, p, u), elementul ales pentru a deveni pivot este cel situat inițial la marginea din stânga, a_p. Dacă inițializarea $d \leftarrow 0$ se înlocuiește cu $d \leftarrow 1$, atunci elementul ce va deveni pivot este cel situat inițial la marginea din dreapta, a_u.

Exemplul 1. În figura următoare este reprezentat arborele extins de sortare asociat algoritmului de sortare rapidă pentru $n = 3$. Observăm că algoritmul nu conține comparații de chei redundante.



Complexitatea algoritmului

Teorema 1 (**complexitatea algoritmului de sortare rapidă**). *Algoritmul de sortare rapidă a unui vector cu n componente are complexitatea*

$$\begin{cases} \Theta(n^2), & \textit{pentru timpul de execuție în cazul cel mai defavorabil,} \\ \Theta(n \log_2 n), & \textit{pentru timpul de execuție în cazul cel mai favorabil,} \\ \Theta(n \log_2 n), & \textit{pentru timpul mediu de execuție.} \end{cases}$$

Demonstraţie. Vom evalua doar numărul de **comparație de chei** (comparații în care intervin elemente ale vectorului), celelalte operații nedepășind ordinul de creștere al acestora.

Fie $N(n)$ numărul de comparații de chei efectuate de algoritm pentru un vector cu n componente.

În procedura **PIVOT**(A, p, u) se efectuează $u - p$ comparații de chei.

Conform descrierii recursive a algoritmului, rezultă că numerele $N(n)$ verifică relația de recurență

$$N(n) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n \in \{0, 1\}, \\ N(k-1) + N(n-k) + n - 1, & \text{dacă } n \geq 2, \end{cases} \tag{1}$$

unde k este indicele pivotului, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Analizăm întâi cazurile extreme, în raport cu diferența absolută a dimensiunilor celor două partiții rezultate după fixarea pivotului. Această diferență este

$$|(n-k) - (k-1)| = |n + 1 - 2k|.$$

Cazul 1) Notăm cu $N^+(n)$ numărul de comparații de chei efectuate de algoritm în cazul în care la fiecare partiționare cele două partiții obținute sunt cât mai ,,neechilibrate", adică

diferența absolută a dimensiunilor lor este maximă. Evident, $|n+1-2k|$ este maxim pentru $k \in \{1, n\}$, deci

$$N^+(n) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n \in \{0,1\}, \\ N^+(n-1) + n - 1, & \text{dacă } n \geq 2 \end{cases}$$

(deoarece $N^+(0) = 0$). Această situație apare, de exemplu, atunci când vectorul A este de la început sortat crescător (deoarece procedura **PIVOT** va fi apelată succesiv pentru perechile de indici $(1,n), (2,n), \ldots, (n-1,n)$). Avem

$$\begin{aligned} N^+(n) &= N^+(n-1) + n - 1 \\ &= N^+(n-2) + (n-2) + (n-1) \\ &\ldots \\ &= N^+(1) + 1 + 2 + \ldots + (n-2) + (n-1), \end{aligned}$$

deci

$$N^+(n) = \frac{n(n-1)}{2}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Demonstrăm că

$$N(n) \leq N^+(n), \ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

prin inducție.

Pentru $n \in \{0,1\}$ avem $N(n) = N^+(n) = 0$.

Presupunem inegalitatea adevărată pentru orice $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ și o demonstrăm pentru n ($n \geq 2$). Într-adevăr, folosind relația de recurență (1), ipoteza de inducție pentru $k-1$ și $n-k$ și relația (2) avem

$$\begin{aligned} N(n) &= N(k-1) + N(n-k) + n - 1 \\ &\leq N^+(k-1) + N^+(n-k) + n - 1 \\ &= \frac{(k-1)(k-2)}{2} + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2} + n - 1 \\ &= \frac{n(n-1)}{2} - (k-1)(n-k) \\ &\leq \frac{n(n-1)}{2}. \end{aligned}$$

Mai mult, egalitatea are loc dacă și numai dacă $k \in \{1, n\}$ (la fiecare partiționare!).

Astfel Cazul 1) este cel mai defavorabil, având numărul de comparații $N^+(n) = \dfrac{n(n-1)}{2}$ și, prin urmare, complexitatea $\Theta(n^2)$.

Cazul 2) Notăm cu $N^-(n)$ numărul de comparații de chei efectuate de algoritm în cazul în care la fiecare partiționare cele două partiții obținute sunt cât mai ,,echilibrate", adică diferența absolută a dimensiunilor lor este minimă. Evident, $|n+1-2k|$ este minim pentru $k \in \left\{ \left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor, \left\lceil \dfrac{n+1}{2} \right\rceil \right\}$, deci

$$N^-(n) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n \in \{0,1\}, \\ N^-\left(\left\lceil \dfrac{n-1}{2} \right\rceil\right) + N^-\left(\left\lfloor \dfrac{n-1}{2} \right\rfloor\right) + n - 1, & \text{dacă } n \geq 2, \end{cases} \tag{3}$$

Reamintim că $\lfloor x \rfloor$ reprezintă partea întreagă (inferioară) a numărului real x (adică aproximarea întreagă prin lipsă a lui x, notată de obicei cu $[x]$), iar $\lceil x \rceil$ reprezintă partea întreagă superioară a numărului real x (adică aproximarea întreagă prin adaos a lui x).

Rezolvăm relația de recurență (3). Pentru $n =$ număr par, adică $n = 2m$, $m \geq 1$, avem

$$\begin{aligned} N^-(n+1) - N^-(n) &= N^-(2m+1) - N^-(2m) \\ &= \big(N^-(m) + N^-(m) + 2m\big) - \big(N^-(m) + N^-(m-1) + 2m - 1\big) \\ &= N^-(m) - N^-(m-1) + 1, \end{aligned}$$

iar pentru $n =$ număr impar, adică $n = 2m+1$, $m \geq 1$, avem

$$\begin{aligned} N^-(n+1) - N^-(n) &= N^-(2m+2) - N^-(2m+1) \\ &= \big(N^-(m+1) + N^-(m) + 2m + 1\big) - \big(N^-(m) + N^-(m) + 2m\big) \\ &= N^-(m+1) - N^-(m) + 1, \end{aligned}$$

deci pentru orice $n \geq 2$ avem

$$N^-(n+1) - N^-(n) = N^-\left(\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1\right) - N^-\left(\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor\right) + 1,$$

egalitatea fiind evident valabilă și pentru $n = 1$. Notând

$$v(n) = N^-(n+1) - N^-(n),\ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

obținem că

$$v(n) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n = 0, \\ v\left(\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor\right) + 1, & \text{dacă } n \geq 1. \end{cases} \tag{5}$$

Demonstrăm că

$$v(n) = \lceil \log_2(n+2) \rceil - 1,\ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

prin inducție.

Pentru $n = 0$ avem $v(0) = 0 = \lceil \log_2 2 \rceil - 1$.

Presupunem egalitatea adevărată pentru orice $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ și o demonstrăm pentru n ($n \geq 1$). Într-adevăr, folosind relația de recurență (5) și ipoteza de inducție pentru $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ avem

$$v(n) = v\left(\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor\right) + 1 = \left\lceil \log_2\left(\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 2\right)\right\rceil = \left\lceil \log_2\left(\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 1\right)\right\rceil.$$

Dar, notând $\lceil \log_2(n+2) \rceil = r$, avem $r \in \mathbb{N}^*$, $r \geq 2$ și, succesiv:

$$r - 1 < \log_2(n+2) \leq r;\ 2^{r-1} < n + 2 \leq 2^r;$$

$$2^{r-1} \leq n + 1 < 2^r;\ 2^{r-2} \leq \frac{n+1}{2} < 2^{r-1};$$

$$2^{r-2} \leq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor < 2^{r-1};\ 2^{r-2} < \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 1 \leq 2^{r-1};$$

$$r - 2 < \log_2\left(\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 1\right) \leq r - 1;$$

$$\left\lceil \log_2\left(\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 1\right)\right\rceil = r - 1,$$

deci

$$v(n) = r - 1 = \lceil \log_2(n+2) \rceil - 1,$$

ceea ce încheie demonstrația prin inducție a relației (6).

Din (4) și (6) rezultă că

$$N^-(n+1) - N^-(n) = \lceil \log_2(n+2) \rceil - 1, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Aplicând succesiv această relație avem

$$\begin{aligned} N^-(n) &= N^-(n-1) + \lceil \log_2(n+1) \rceil - 1 \\ &= N^-(n-2) + \lceil \log_2 n \rceil + \lceil \log_2(n+1) \rceil - 2 \\ &\dots \\ &= N^-(0) + \lceil \log_2 2 \rceil + \lceil \log_2 3 \rceil + \ldots + \lceil \log_2(n+1) \rceil - n. \end{aligned}$$

Cum $N^-(0) = 0$ obținem că

$$N^-(n) = \lceil \log_2 1 \rceil + \lceil \log_2 2 \rceil + \ldots + \lceil \log_2(n+1) \rceil - n, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Dar

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lceil \log_2 i \rceil = (n+1) \lceil \log_2(n+1) \rceil - 2^{\lceil \log_2(n+1) \rceil} + 1$$

(a se vedea demonstrația Teoremei 1 din [4]), deci

$$N^-(n) = (n+1) \lceil \log_2(n+1) \rceil - 2^{\lceil \log_2(n+1) \rceil} - (n-1), \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Demonstrăm că

$$N(n) \geq N^-(n), \ \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{9}$$

prin inducție.

Pentru $n \in \{0, 1\}$ avem $N(n) = N^-(n) = 0$.

Presupunem inegalitatea adevărată pentru orice $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ și o demonstrăm pentru n ($n \geq 2$). Într-adevăr, folosind relațiile de recurență (1) și (3) și ipoteza de inducție pentru $k-1$ și $n-k$ avem

$$\begin{aligned} N(n) - N^-(n) &= N(k-1) + N(n-k) - N^- \left(\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil \right) - N^- \left(\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \right) \\ &\geq \varphi(k), \end{aligned} \tag{10}$$

unde

$$\varphi(k) = N^-(k-1) + N^-(n-k) - N^- \left(\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil \right) - N^- \left(\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \right).$$

Deoarece $\varphi(k) = \varphi(n+1-k)$, rezultă că putem presupune că avem $k \leq n+1-k$, adică

$$k \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1$$

(în caz contrar, notând $k' = n+1-k$ obținem $\varphi(k) = \varphi(k')$ și $k' \in \left\{1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1\right\}$).

Pentru $k = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1$ avem $\varphi(k) = 0$, deci $N(n) - N^-(n) \geq 0$.

Pentru $k \in \left\{1, 2, \ldots, \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor\right\}$, conform (7) avem

$$\begin{aligned}
\varphi(k) &= N^-(k-1) + N^-(n-k) - N^-\left(\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil\right) - N^-\left(\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \lceil \log_2 i \rceil - k + 1 + \sum_{i=1}^{n-k+1} \lceil \log_2 i \rceil - n + k \\
&\quad - \sum_{i=1}^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 1} \lceil \log_2 i \rceil + \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil - \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1} \lceil \log_2 i \rceil + \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n-k+1} \lceil \log_2 i \rceil - \sum_{i=1}^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 1} \lceil \log_2 i \rceil \right) - \left(\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1} \lceil \log_2 i \rceil - \sum_{i=1}^{k} \lceil \log_2 i \rceil \right) \\
&= \sum_{i=\lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 2}^{n-k+1} \lceil \log_2 i \rceil - \sum_{i=k+1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1} \lceil \log_2 i \rceil \\
&= \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1 - k} \left\lceil \log_2 \left(i + \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil + 1 \right) \right\rceil - \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1 - k} \lceil \log_2 (i+k) \rceil \\
&= \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1 - k} \left(\left\lceil \log_2 \left(i + \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil + 1 \right) \right\rceil - \lceil \log_2 (i+k) \rceil \right) \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Conform (10) rezultă din nou că $N(n) - N^-(n) \geq 0$ și astfel demonstrația prin inducție a inegalității (9) este încheiată.

Astfel Cazul 2) este cel mai favorabil, având numărul de comparații dat de relația (8) și, prin urmare, complexitatea $\Theta(n \log_2 n)$.

Semnalăm că egalitatea poate avea loc în (9) și pentru valori $k \notin \left\{ \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil \right\}$, de exemplu pentru $n = 10$ și $k = 4$ ($N^-(3) + N^-(6) = 2 + 8 = 10$, $N^-(4) + N^-(5) = 4 + 6 = 10$).

Cazul 3) Analizăm acum cazul mediu (cazul timpului mediu de execuție). Notăm cu $N_k(n)$ numărul de comparații de chei efectuate de algoritm pentru un vector cu n componente în cazul în care indicele pivotului este k. Evident k poate lua oricare dintre valorile $1, 2, \ldots, n$, iar toate aceste situații sunt echiprobabile, deci numărul mediu de comparații de chei are valoarea

$$N_{med}(n) = \frac{\sum_{k=1}^{n} N_k(n)}{n}.$$

Conform descrierii algoritmului (a se vedea relația (1)) avem

$$N_k(n) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n \in \{0, 1\}, \\ N_{med}(k-1) + N_{med}(n-k) + n - 1, & \text{dacă } n \geq 2, \end{cases}$$

pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, deci

$$N_{med}(n) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n \in \{0, 1\}, \\ \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} (N_{med}(k-1) + N_{med}(n-k) + n - 1)}{n}, & \text{dacă } n \geq 2. \end{cases}$$

Pentru orice $n \geq 2$ avem

$$\begin{aligned} N_{med}(n) &= \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} N_{med}(k-1) + \sum\limits_{k=1}^{n} N_{med}(n-k) + n(n-1)}{n} \\ &= \frac{2\sum\limits_{k=1}^{n} N_{med}(k-1) + n(n-1)}{n}, \end{aligned}$$

deci numărul mediu de comparații de chei verifică relația de recurență

$$N_{med}(n) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n \in \{0, 1\}, \\ \dfrac{2\sum\limits_{k=1}^{n} N_{med}(k-1) + n(n-1)}{n}, & \text{dacă } n \geq 2. \end{cases}$$

Formula dată de a doua ramură este valabilă și pentru $n = 1$. Pentru $n \geq 2$ avem

$$nN_{med}(n) = 2\sum_{k=1}^{n} N_{med}(k-1) + n^2 - n,$$

$$(n-1)N_{med}(n-1) = 2\sum_{k=1}^{n-1} N_{med}(k-1) + (n-1)^2 - (n-1),$$

deci prin scădere obținem

$$nN_{med}(n) - (n-1)N_{med}(n-1) = 2N_{med}(n-1) + 2n - 2,$$

adică

$$nN_{med}(n) = (n+1)N_{med}(n-1) + 2n - 2.$$

Această egalitate poate fi rescrisă sub forma

$$n(N_{med}(n) - 2) = (n+1)(N_{med}(n-1) - 2) + 2n.$$

Împărțind prin $n(n+1)$ obținem

$$\frac{N_{med}(n) - 2}{n+1} = \frac{N_{med}(n-1) - 2}{n} + \frac{2}{n+1}.$$

Aplicând succesiv această relație avem

$$\begin{aligned} \frac{N_{med}(n) - 2}{n+1} &= \frac{N_{med}(n-1) - 2}{n} + \frac{2}{n+1} \\ &= \frac{N_{med}(n-2) - 2}{n-1} + \frac{2}{n} + \frac{2}{n+1} \\ &\ldots \\ &= \frac{N_{med}(1) - 2}{2} + \frac{2}{3} + \ldots + \frac{2}{n} + \frac{2}{n+1}. \end{aligned}$$

Cum $N_{med}(1) = 0$, obținem că

$$N_{med}(n) = 2(n+1)\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) - 4n, \ \forall\, n \geq 1.$$

Aplicând *Teorema Stolz-Cesàro* pentru șirurile $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ și $b_n = \ln n$ (strict crescător și având limita ∞) avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\ln(n+1) - \ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\ln e} = 1.$$

Deducem că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_{med}(n)}{n \log_2 n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 2 \cdot N_{med}(n)}{n \ln n}$$
$$= \ln 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2(n+1)}{n} \cdot \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}}{\ln n} - \frac{4}{\ln n} \right)$$
$$= 2 \ln 2, \tag{11}$$

deci $N_{med}(n) = \Theta(n \log_2 n)$, □

Următorul rezultat este o consecință directă a teoremei anterioare și a Teoremei 1 din [3] (care afirmă că orice algoritm optim de sortare, bazat pe comparații de chei, are complexitatea $\Theta(n \log_2 n)$).

Corolarul 1 (**optimalitatea algoritmului de sortare rapidă**). *Algoritmul de sortare rapidă este asimptotic-optim (în clasa algoritmilor bazați pe comparații de chei), în raport cu timpul mediu de execuție.*

Observația 3. În cazul cel mai favorabil, conform relației (8) rezultă că numărul de comparații de chei efectuate de algoritmul de sortare rapidă este asimptotic echivalent cu $n \log_2 n$.

În cazul timpului mediu de execuție, conform relației (11) rezultă că numărul de comparații de chei efectuate de algoritmul de sortare rapidă este asimptotic echivalent cu

$$2 \ln 2 \cdot n \log_2 n.$$

Deci conform Teoremei 1 din [3] (care afirmă și că numărul de comparații de chei efectuate de un algoritm optim de sortare a unui vector cu n componente este asimptotic echivalent cu $n \log_2 n$, atât în cazul cel mai defavorabil, cât și în cazul timpului mediu de execuție), rezultă că algoritmul de sortare rapidă nu este optim în raport cu timpul mediu de execuție.

Pe de altă parte, cum $2 \ln 2 \simeq 1{,}39$, rezultă că în cazul mediu numărul de comparații efectuate este mai mare doar cu aproximativ 39% decât în cazul cel mai favorabil (sau decât un algoritm optim).

Observația 4. În încercarea de a evita cazurile devavorabile ale algoritmului de sortare rapidă, s-au propus variante ale algoritmului în care se urmărește o echilibrare a celor două partiții. De exemplu, o variantă constă în alegerea drept pivot a elementului din mijloc din ordonarea crescătoare a trei elemente: elementele de la cele două margini (a_p și a_u) și elementul median (a_m, $m = \left\lfloor \frac{p+u}{2} \right\rfloor$), variantă numită **metoda medianei din trei** (***median-of-three quicksort***). Mai multe detalii privind implementarea și complexitatea acestei variante, precum și a altor variante ale algoritmului de sortare rapidă, pot fi găsite în [9] și [10].

Bibliografie

[1] Gh. Barbu, I. Văduva, M. Boloșteanu, *Bazele informaticii*, Editura Tehnică, București, 1997.

[2] C. Bălcău, *Optimalitatea algoritmului de căutare binară*, MATINF I (2018), nr. 1, 39–51.

[3] C. Bălcău, *Complexitatea algoritmilor de sortare*, MATINF II (2019), nr. 3, 41–48.

[4] C. Bălcău, *Complexitatea algoritmului de sortare prin interclasare (mergesort)*, MATINF III (2020), nr. 5, 15–24.

[5] A. Carabineanu, *Structuri de date*, `http://ebooks.unibuc.ro/informatica/carabineanu/CARA_STR.pdf`.

[6] T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest, C. Stein, *Introduction to Algorithms*, MIT Press, Cambridge, 2009.

[7] H. Georgescu, *Tehnici de programare*, Editura Universității din București, București, 2005.

[8] D.E. Knuth, *The Art Of Computer Programming. Vol. 3: Sorting and Searching*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1998.

[9] R. Sedgewick, P. Flajolet, *An Introduction to the Analysis of Algorithms*, Addison-Wesley, New Jersey, 2013.

[10] R. Sedgewick, K. Wayne, *Algorithms*, Addison-Wesley, Massachusetts, 2011.

Concursul ,,Dräexlmaier IT Day", Ediția a III-a, 2021

Mihai-Radu Găman [1] *și Maria Miroiu* [2]

Departamentul **IT Center Pitești** din cadrul companiei **DRÄXLMAIER Group** a organizat în luna mai 2021 **a treia ediție a concursului "Dräxlmaier IT Day"**. Concursul a constat în realizarea de aplicații informatice pentru **Gestionarea bunurilor din cadrul unei companii**. Nu au fost restricții în ceea ce privește limbajele de programare. Datele trebuiau stocate într-o bază de date relaționale (MS Access, mySql, Oracle, etc.). De asemenea, un raport al rezervărilor trebuia să fie disponibil la cerere.

Punctarea proiectelor s-a făcut astfel:
◦ 100 de puncte pentru implementarea administrării (insert/update/delete) centrelor de cost;
◦ 100 de puncte pentru implementarea administrării bunurilor (insert/update);
◦ 100 de puncte pentru realizarea raportului cu starea curentă a bunurilor din sisteme;
◦ 100 de puncte pentru realizarea bazei de date în acord cu diagrama entităților.

Prezentarea proiectelor s-a desfășurat online, în data de 14 mai 2021. La concurs au participat studenți de la domeniul de licență Informatică din cadrul Facultății de Științe, Educație Fizică și Informatică, Universitatea din Pitești, iar juriul a fost compus din mai mulți specialiști din cadrul IT Center Pitești, Draexlmaier Group.

Premiile oferite: premiul I a constat dintr-un voucher de cumpărături pe platforma Emag în valoare de 1400 lei și a fost câștigat de studenta Goșoiu Cosmin Iulian de la Informatică, anul 3, premiul al II-lea a constat dintr-un voucher de cumpărături pe platforma Emag în valoare de 700 lei și a fost câștigat de studentul Vasile Marian-Lucian de la Informatică, anul 2, iar premiul al III-lea a constat dintr-un voucher de cumpărături pe platforma Emag în valoare de 250 lei și a fost câștigat de Olaru Valentin-Daniel de la Informatică, anul 2.

1 Model entități

Informațiilor stocate în sistem (tabele în baze de date relaționale) le sunt asociate următoarele entități: <**employee**>, <**asset**>, <**costcenters**>, <**asset_employee**>.

Diagrama conceptuală a acestor entități și relațiile dintre ele sunt descrise în imaginea următoare.

[1]Head of Delivery Supply Chain Management, IT Center Pitești, Draexlmaier Group, mihai.gaman@draexlmaier.com
[2]Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, maria.miroiu@gmail.com

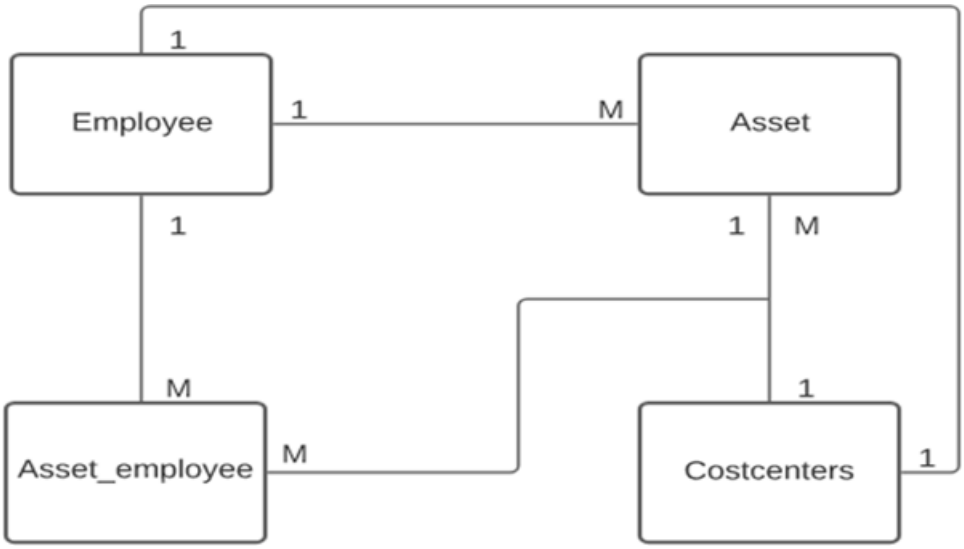


Figura 1. Relațiile între entități

2 Descrierea relațiilor

- un angajat (<employee>) poate adăuga unul sau mai multe asset-uri (<asset>) în sistem;
- un angajat (<employee>) poate aparține unui singur centru de cost (<costcenters>);
- un angajat (<employee>) poate avea mai multe bunuri asignate (<asset_employee>);
- bunurile asignate unui angajat (<asset_employee>) trebuie să facă parte din același centru de cost (<costcenters>).

Entitatea <employee>

Un <employee> este o entitate ce va fi folosită pentru a stoca date despre angajații din cadrul companiei.

Atribut	Tip	Validare	Descriere
empl_id	int	obligatoriu	primary key, id-ul angajatului
name	varchar	obligatoriu	numele angajatului
costcenter	varchar	obligatoriu	numele centrului de cost
manager	varchar	obligatoriu	managerul angajatului

Entitatea <asset>

Un <asset> este o entitate ce va fi folosita pentru a contoriza bunurile ce trec prin companie.

Atribut	Tip	Validare	Descriere
asset_id	int	obligatoriu	primary key, id-ul asset-ului
name	varchar	obligatoriu	numele asset-ului
description	varchar	obligatoriu	descrierea asset-ului
input_date	date	obligatoriu	data intrării asset-ului în circuit
asset_cstc_nr	varchar	obligatoriu	foreign key, centrul de cost de care apartine asset-ul

Entitatea <costcenters>

<costcenters> este o entitate responsabilă cu managementul centrelor de cost și asignarea lor pentru fiecare angajat.

Atribut	Tip	Validare	Descriere
cstc_nr	int	obligatoriu	primary key
cstc_empl_id (manager centru de cost)	int	obligatoriu	foreign key (este un angajat din <employees>)
cstc_delete_flag	boolean	obligatoriu	flag ce va indica dacă centrul de cost a fost sters sau nu

Entitatea <asset_employee>

Această entitate se ocupă de bunurile asignate unui angajat și contorizarea acestora. *asset_id și empl_id formează o cheie compusă (composite key).

Atribut	**Tip**	**Validare**	**Descriere**
asset_id	int	obligatoriu	primary key; foreign key, id-ul asset-ului din <asset>
empl_id	int	obligatoriu	primary key; foreign key, id-ul angajatului din <employees>
from	date	obligatoriu	data primirii asset-ului
to	date	obligatoriu	data predării asset-ului
cstc_nr	int	obligatoriu	foreign key, id-ul centrului de cost din <costcenters>
end_of_life	date	obligatoriu	data sfârșitului de viață pentru asset-ul în cauză

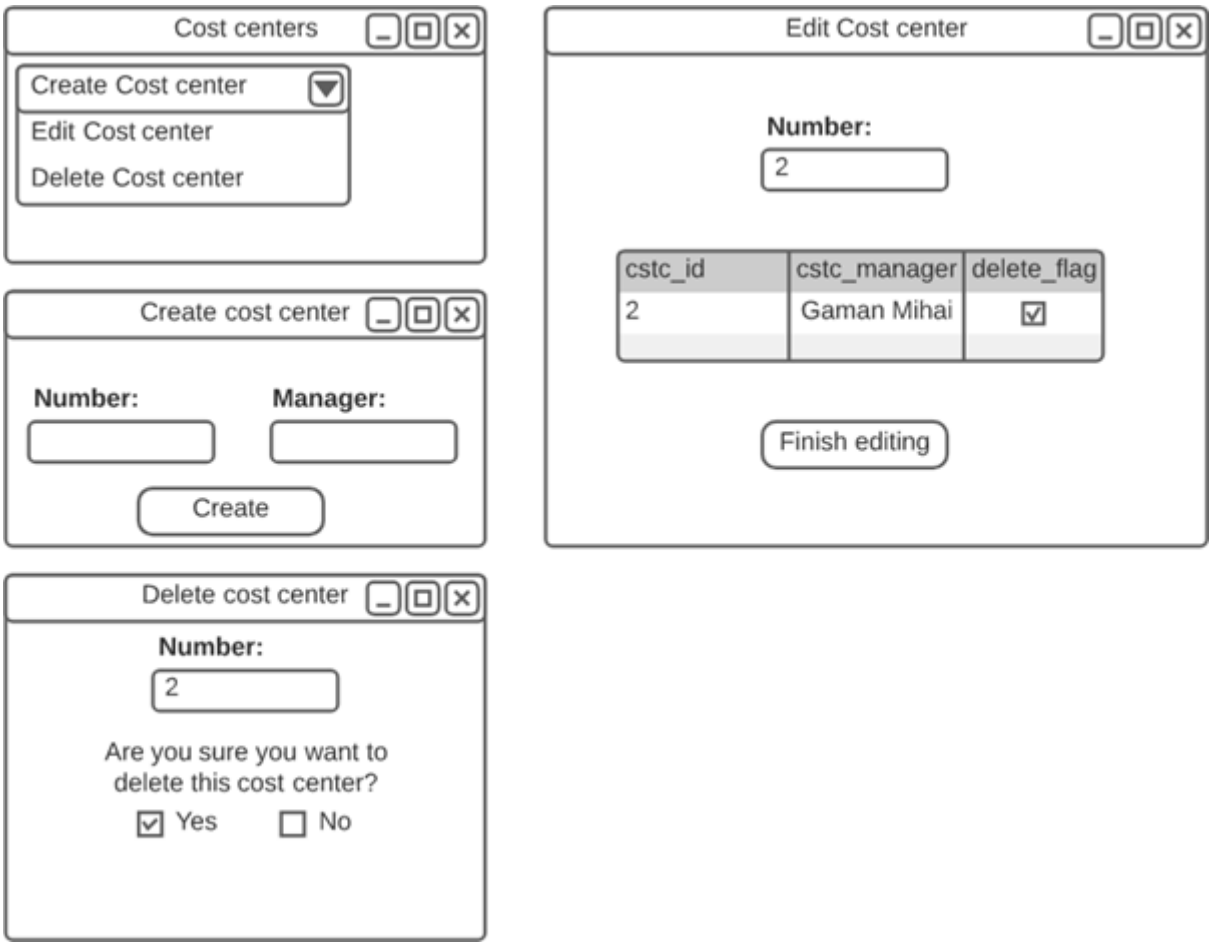
3 Cerințe funcționale

Proiectul curent presupune realizarea unei aplicații pentru:

- introducerea unui asset nou în sistem;
- vizualizarea asseturilor pentru angajați și realizarea operațiilor de adăugare, editare, ștergere pentru acestea;
- introducerea/editarea/ștergerea unui centru de cost;
- introducerea/editarea/ștergerea unui angajat;
- dacă un asset trece de la un angajat la altul, atunci se va adăuga o nouă inregistrare în <asset_employee>;
- generarea unui raport cu starea curentă a asseturilor ce nu sunt casate (ieșite din ciclul de viață).

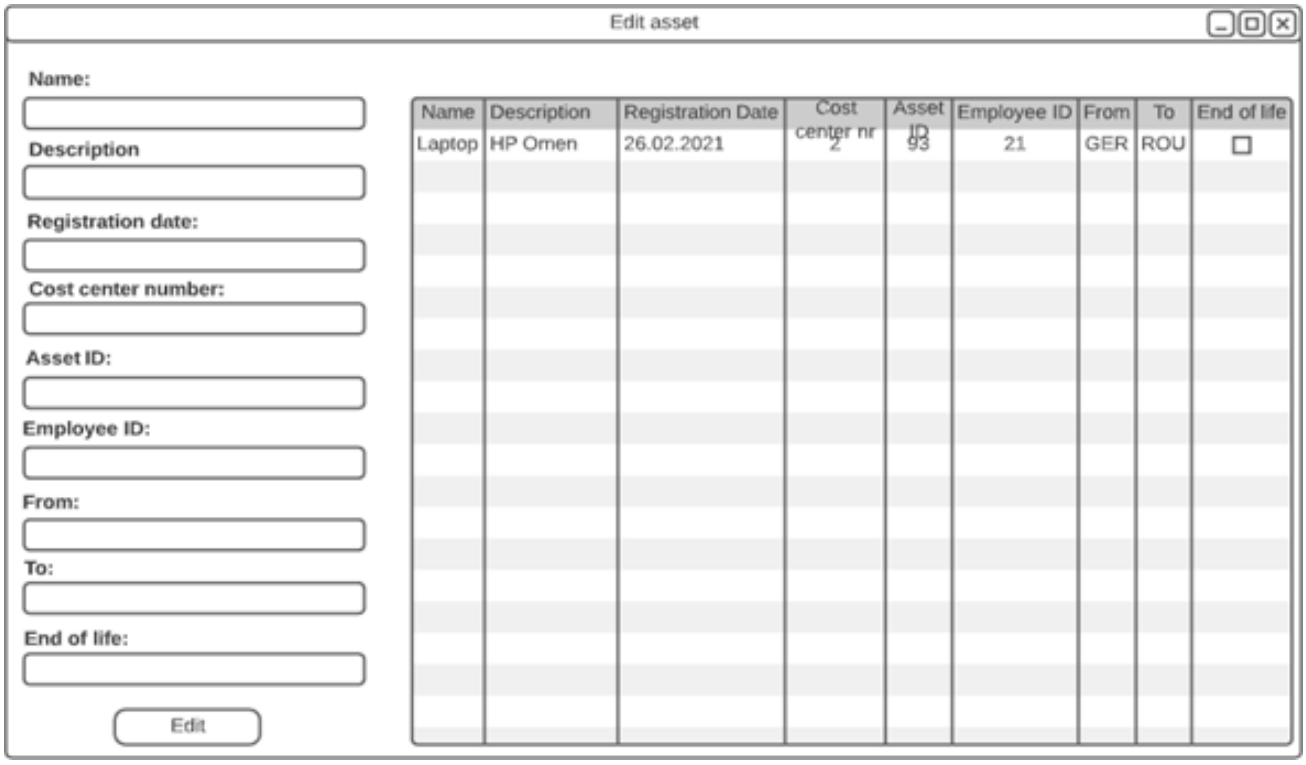
4 Exemple pentru interfața grafică:

- introducerea/editarea/ștergerea unui centru de cost



- introducerea unui asset nou în sistem

- editarea unui asset din sistem



Sistemul realizat va fi dezvoltat cu orice tehnologie se dorește. Este indicată folosirea unei tehnologii compatibile cu cerințele actuale de pe piață (de exemplu: Angular).

Bazele de date pot fi sisteme de gestiune a datelor (Oracle, mySQL etc.) sau pot fi simple fisiere text, xml, json, ș.a.m.d. În al doilea caz, integritatea datelor și a relațiilor va trebui asigurată în interiorul aplicației.

MATEMATICĂ PENTRU PROGRAMATORI ȘI PROGRAMARE PENTRU MATEMATICIENI

Mulțimi legate[1]

Nicolae Stăniloiu [2]

La etapa județeană a olimpiadei de matematică din anul 2006, una din problemele propuse la clasa a VII-a definea mulțimile legate ca fiind mulțimile M de 4 numere naturale cu proprietatea că pentru orice x din mulțime cel puțin unul dintre numerele $x-1, x+1$ este în M. Vom încerca în această lucrare să definim mulțimile legate de ordin k eliminând condiția ca mulțimea să conțină patru elemente și apoi vom încerca să identificăm o metodă de calcul a diferitelor tipuri de submulțimi legate ale mulțimii $A_n = \{1, 2, ..., n\}$.

Definiția 1. *O mulțime M de numere naturale se numește* ***simplu legată*** *dacă este mulțimea vidă sau dacă pentru orice x din mulțime cel puțin unul dintre numerele $x-1, x+1$ este în M.*

Observația 1. O mulțime nevidă de numere naturale simplu legată este formată din ,,blocuri" de numere consecutive de lungime cel puțin 2.

Definiția 2. *Fie $k \geq 1$. O mulțime M de numere naturale se numește* ***legată de ordin*** *k dacă este mulțimea vidă sau dacă pentru orice x din M, cel puțin una din mulțimile $\{x-i, x-i+1, \ldots, x-i+k\}$ cu $0 \leq i \leq k$, este inclusă în M.*

Observația 2. O mulțime nevidă de numere naturalelegată de ordin k este formată din ,,blocuri" de numere consecutive de lungime cel puțin $k+1$. Dacă $k = 1$ se obține definiția mulțimilor simplu legate. Mulțimile legate de ordin 2 le vom numi și mulțimi dublu legate.

Fie acum mulțimea $A_n = \{1, 2, ..., n\}$. Pentru $k \in \mathbb{N}$, $k < n$, vom nota cu X_n^k submulțimile lui A_n legate de ordin k. În particular X_n^1 reprezintă submulțimile lui A_n simplu legate iar X_n^2 reprezintă submulțimile lui A_n dublu legate.

Cu aceste notații sunt evidente următoarele relații:

1. $|X_n^{n-1}| = 2, |X_0^1| = 1, |X_1^1| = 1, |X_2^1| = 2, |X_0^2| = 1, |X_1^2| = 1, |X_2^2| = 1, |X_3^2| = 2$;
2. Dacă $k, k', n \in \mathbb{N}^*$ cu $k < k'$, $k < n$, $k' < n$ atunci $X_n^{k'} \subset X_n^k$;
3. Dacă $n, m, k \in \mathbb{N}^*$ cu $k < n < m$ atunci $X_n^k \subset X_m^k$.

Ne punem mai departe, problema determinării numărului submulțimilor lui A_n simplu legate, apoi dublu legate și în final a submulțimilor legate de ordin k cu $k < n$.

Vom considera în acest sens mulțimea: $C_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_i \in B, \forall i = \overline{1 \ldots n}\}$ unde $B = \{0, 1\}$. Un element al mulțimii C_n îl vom numi și n-cuvânt. Vom asocia de asemenea fiecărei submulțimi X a lui A_n un n-cuvânt $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, format în felul următor: Dacă $i \in X$atunci $a_i = 1$, altfel $a_i = 0$.

[1]Acest articol a fost comunicat la Simpozionul Județean de Matematică ,,Marinescu-Ghemeci Octavian", Ediția I, Potcoava, 8 mai 2021.

[2]Profesor, Bocșa, staniloiun@yahoo.com

Definiția 3. *Se numește n-cuvânt legat de ordin k un n-cuvânt asociat unei mulțimi legate de ordin k.*

Vom nota cu Y_n^k submulțimile lui C_n formate din n-cuvinte legate de ordin k. În particular Y_n^1 reprezintă mulțimea n-cuvintelor simplu legate iar Y_n^2 reprezintă mulțimea n-cuvintelor dublu legate.

Vom nota de asemenea cu L_n^k, numărul n-cuvintelor legate de ordin k. În particular L_n^1 reprezintă numărul n-cuvintelor simplu legate iar L_n^2 reprezintă numărul n-cuvintelor dublu legate.

Propoziția 1. *Cu notațiile anterioare avem următoarea relație de recurență:*

$$L_n^1 = L_{n-1}^1 + L_{n-2}^1 + L_{n-4}^1 \text{ pentru orice } n \geq 4. \tag{1}$$

Demonstraţie. Într-adevăr, numărul n-cuvintelor simplu legate care încep cu 0 este L_{n-1}^1. Numărul n-cuvintelor simplu legate care încep cu 1 îl vom calcula astfel: Vom observa pentru început că un astfel de n-cuvânt are în mod obligatoriu în poziția a doua elementul 1. Dacă la primele două poziții adăugăm toate $(n-2)$- cuvintele simplu legate care se formează cu restul pozițiilor dintr-un astfel de cuvânt se obțin n-cuvinte simplu legate. Deasemenea n-cuvinte simplu legate mai putem obține și dacă în pozițiile 3 și 4 punem 1 și respectiv 0 iar în rest $(n-4)$-cuvinte simplu legate. Prin urmare numărul n-cuvintelor simplu legate care încep cu 1 este: $L_{n-2}^1 + L_{n-4}^1$ și deci relația de recurență este acum justificată. □

Folosind un program simplu de calculator am creat în Excel o funcție de numărare (folosind definiția) a n-cuvintelor simplu legate cu care am obținut următoarele rezultate:

k	L_k^1
0	1
1	1
2	2
3	4
4	7
5	12
6	21
7	37
8	65
9	114
10	200
11	351
12	616
13	1081
14	1897

Bineînțeles că având calculate valorile L_k^1 cu $0 \leq k \leq 3$, se poate constata ușor că valorile L_k^1 cu $k \geq 4$ obținute cu această funcție verifică relația de recurența de mai sus.

Vom încerca acum să determinăm o relație de recurență pentru calculul lui L_n^2 adică numărului de n-cuvinte dublu legate.

Propoziţia 2. *Cu notaţiile anterioare avem următoarea relaţie de recurenţă:*

$$L_n^2 = L_{n-1}^2 + L_{n-3}^2 + L_{n-5}^2 + L_{n-6}^2 \text{ pentru } n \geq 6 \tag{2}$$

Demonstraţie. Într-adevăr, numărul n-cuvintelor dublu legate care încep cu 0 este L_{n-1}^2. Numărul n-cuvintelor dublu legate care încep cu 1 îl calculăm astfel: Un astfel de n-cuvânt are în mod obligatoriu în poziţiile 2 şi 3 cifra 1. Dacă completăm aceste cuvinte cu $(n-3)$-cuvinte dublu legate se obţin n-cuvinte dublu legate. Deasemenea n-cuvinte dublu legate se mai pot obţine şi dacă completăm poziţiile 4 şi 5 cu cifrele 1 şi respectiv 0 şi în rest $(n-5)$-cuvinte dublu legate, sau dacă poziţiile 4, 5 şi 6 se completează cu cifrele 1, 1 şi respectiv 0 iar în rest cu $(n-6)$-cuvinte dublu legate. Prin urmare numărul n-cuvintelor dublu legate care încep cu 1 este $L_{n-3}^2 + L_{n-5}^2 + L_{n-6}^2$ şi deci relaţia din propoziţia 2 este acum justificată. □

Folosind calculatorul am creat o a doua funcţie care determină numărul L_k^2 pentru $0 \leq k \leq 14$ obţinând următoarele rezultate:

k	L_k^2
0	1
1	1
2	1
3	2
4	4
5	7
6	11
7	17
8	27
9	44
10	72
11	117
12	189
13	305
14	493

Observaţia 3. Relaţiile de recurenţă deduse în cele două propoziţii permit determinarea unei formule de calculpentru L_n^1, respective L_n^2.

Se observă că numerele obţinute cu ajutorul calculatorului verifică relaţia de recurenţă.

Folosind relaţiile de recurenţă deduse şi un program corespunzător pe calculator putem calcula L_n^1şi L_n^2 pentru valori suficient de mari ale lui n.

Pentru calculul n-cuvintelor legate de ordin k, $k \in \mathbb{N}^*$ vom demonstra următoarea:

Propoziţia 3. *Cu notaţiile anterioare avem următoarea relaţie de recurenţă:*

$$L_n^k = L_{n-1}^k + L_{n-k-1}^k + L_{n-k-3}^k + L_{n-k-4}^k + \ldots + L_{n-2k-2}^k \text{ pentru } n \geq 2k+2.$$

Demonstraţie. Într-adevăr, numărul n-cuvintelor legate de ordin k care încep cu 0 este L_{n-1}^k. Numărul n-cuvintelor legate de ordin k care încep cu 1 îl calculăm astfel: Un astfel den-cuvânt are în mod obligatoriu în toate poziţiile începând de la poziţia 2 şi până la poziţia $(k+1)$ cifra 1. Dacă completăm aceste cuvinte cu $(n-k-1)$-cuvinte legate de ordin $k$se obţin n-cuvinte

legate de ordin k. Deasemenea n-cuvinte legate de ordin k se mai pot obține și dacă, pentru $3 \leq i \leq k+2$, completăm pozițiile $(k+2), ..., (k+i)$ cu 1, excepție făcând ultima poziție, care se va completa cu 0 iar în restul pozițiilor se vor pune $n-2k-i$-cuvinte legate de ordin k. Numărul total al acestor n-cuvinte legate de ordin k care se obțin prin acest procedeu, fiind egal cu $L^k_{n-k-3} + L^k_{n-k-4} + ... + L^k_{n-2k-2}$, deducem relația de recurență din enunț. □

Observația 4. Pentru $k = 1$ se obține recurența de la (1) iar pentru $k = 2$ se obține recurența de la (2)

Listingul pentru funcțiile create în Excel este următorul:

```
Public N As Integer
Public B(0 To 50) As Integer
Public NrSbm As Long

Public Function CalcSbm1(k As Integer) As Integer
Dim Max As Long
Dim Cont As Long

N=k
Max=1
For i=1 To N
    Max=Max * 2
Next i
NrSbm=Max
For Cont=1 To Max
    Bin Cont-1
    For i=1 To N
        If (B(i-1)=0) And (B(i)=1) And (B(i+1)=0) Then
            NrSbm=NrSbm-1
            Exit For
        End If
    Next i
Next Cont
CalcSbm1=NrSbm
End Function

Public Function CalcSbm2(k As Integer) As Integer
Dim Max As Long
Dim Cont As Long

N=k
Max=1
For i=1 To N
    Max=Max * 2
Next i
NrSbm=Max
For Cont=1 To Max
    Dim Cond1, Cond2 As Boolean
    Bin Cont-1
    For i=1 To N
        Cond1=(B(i-1)=0) And (B(i)=1) And (B(i+1)=0)
        Cond2=(B(i-1)=0) And (B(i)=1) And (B(i+1)=1) And (B(i+2)=0)
        If Cond1 Or Cond2 Then
            NrSbm=NrSbm-1
            Exit For
        End If
    Next i
Next Cont
```

```
CalcSbm2=NrSbm
End Function

Public Function CalcSbm3(k As Integer) As Integer
Dim Max As Long
Dim Cont As Long

N=k
Max=1
For i=1 To N
    Max=Max * 2
Next i
NrSbm=Max
For Cont=1 To Max
    Dim Cond1, Cond2, Cond3 As Boolean
    Bin Cont-1
    For i=1 To N
     Cond1=(B(i-1)=0) And (B(i)=1) And (B(i+1)=0)
     Cond2=(B(i-1)=0) And (B(i)=1) And (B(i+1)=1) And (B(i+2)=0)
     Cond3=(B(i-1)=0) And (B(i)=1) And (B(i+1)=1) And (B(i+2)=1) And (B(i+3)=0)
     If Cond1 Or Cond2 Or Cond3 Then
     NrSbm=NrSbm-1
    Exit For
    End If
    Next i
Next Cont
CalcSbm3=NrSbm
End Function

Public Sub Bin(x As Integer)
 For i=1 To N
      B(i)=x Mod 2
      x=Int(x / 2)
 Next i
 B(0)=0
 B(N+1)=0
 B(N+2)=0
 B(N+3)=0
End Sub
```

RUBRICA DE ROBOTICĂ ȘI MEDII GRAFICE DE PROGRAMARE

Senzori tactili și motoare mari în Minstorms EV3

Doru Anastasiu Popescu [1]

Senzorul tactil EV3 (figura 1) este folosit pentru a detecta dacã partea frontalã a acestuia a fost atinsã sau nu. Acesta permite numãrarea apãsãrilor pe zona frontalã roșie și este folosit pentru a orienta un robot Minstorms EV3 într-o zonã cu mai multe obiecte. Acest sensor permite ca sistemului ce îl utilizează sã ia decizii în funcție de modul de atingere al acestuia.

Motoarele mari Minstorms EV3 (figura 2) sunt utilizate pentru deplasarea roboților într-o zonã bine delimitatã, aceste motoare pot fi configurate pentru utilizare cu diferite viteze.

Figura 1. Senzorul ultrasonic

Figura 2. Motor mare

Pentru aplicațiile urmãtoare vom considera motorul mare conectat la portul C și senzorul tactil la portul 1.

Problema 1

Se dã o caramidã inteligentã (intelligent brick) conectatã la senzorul tactil prin portul 1. Se cere sã se pornească și sã se oprească motorului de la portul C, folosind senzorul tactil. Viteza mototului va fi de 50 rotații.

Rezolvare

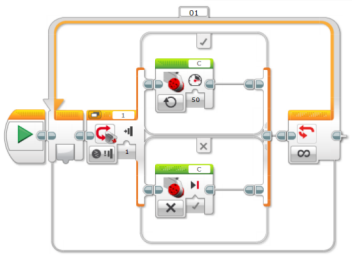


Figura 3. Succesiunea de blocuri Minstorms EV3 pentru rezolvarea problemei 1

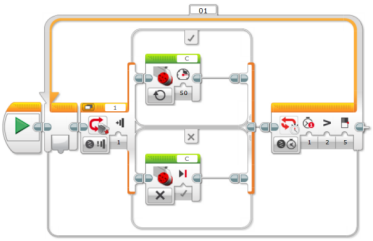


Figura 4. Succesiunea de blocuri Minstorms EV3 pentru rezolvarea problemei 1 cu o altã condiție de oprire a secvenței de blocuri

[1]Conf. univ. dr., Universitatea din Pitești, dopopan@yahoo.com

Problema 2

Realizați un program pentru pornirea și oprirea motorului de la portul C, folosind senzorul tactil de la portul 1. Viteza putând fi mãritã folosind senzorul tactil de la portul 2 cu 5 rotații la o atingere.

Rezolvarea este prezentatã în figura 5.

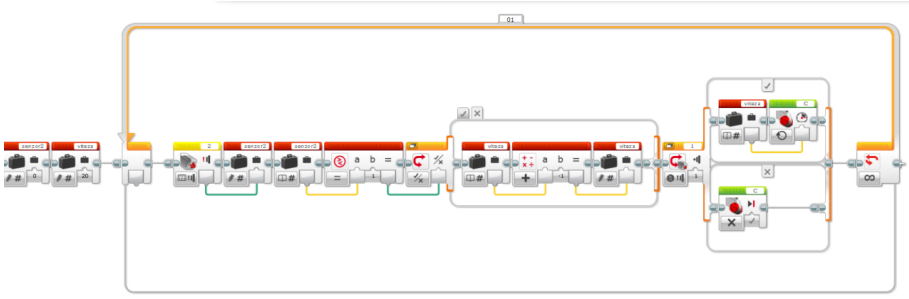


Figura 5. Succesiunea de blocuri Minstorms EV3 pentru rezolvarea problemei 2 cu variabile

Problema 3

Realizați un program pentru pornirea și oprirea motorului de la portul C, folosind senzorul tactil conectat la portul 1. Viteza putând fi maritã folosind senzorul tactil de la portul 2 și micșoratã prin intermediul senzorul tactil de la portul 3.

Rezolvarea este prezentatã în figura 6 și 7.

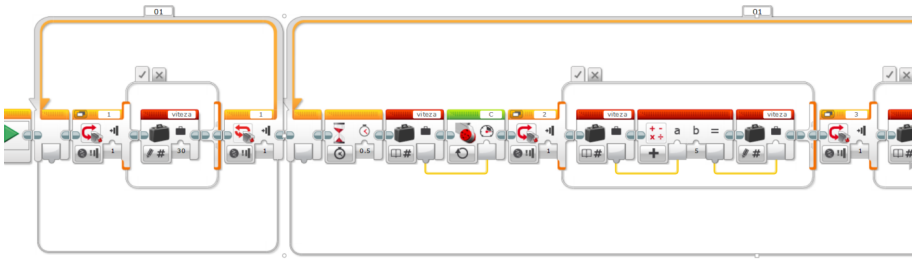


Figura 6. Prima parte cu succesiunea de blocuri Minstorms EV3 pentru rezolvarea problemei 3

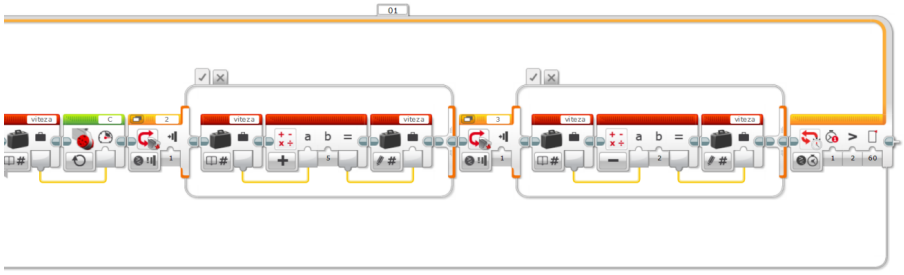


Figura 7. Continuare succesiuni de la figura 6 de blocuri Minstorms EV3 pentru rezolvarea problemei 3

Probleme propuse spre rezolvare

1. Modificați ultimul program astfel încât motorul să poată doar să-și mărească viteza. Se va utiliza un singur senzor tactil.
2. Modificați ultimul program astfel încât motorul să poată doar să-și micșoreze viteza. Se va utiliza un singur senzor tactil.
3. Folosiți la programele anterioare programarea funcționării motorului cu un anumit număr de rotații.
4. Folosiți la programele anterioare programarea funcționării motorului pe o perioada de timp fixată de voi.

Bibliografie

[1] D.A. Popescu, *Programarea roboților LEGO folosind mediul Mindstorms EV3*, MATINF, nr. 1, 2018.

[2] D.A. Popescu, *Programarea roboților Lego folosind structura alternativă în mediul grafic interactiv Mindstorms Education EV3*, MATINF, nr. 2, 2018.

[3] D.A. Popescu, *Repetarea operațiilor unui robot Mindstorms Education EV3*, MATINF, nr. 5, 2020.

[4] D.A. Popescu, Senzorul ultrasonic pentru Minstorms EV3, MATINF, nr. 6, 2020.

[5] D.A. Popescu, S. Profeanu, S. Dobrescu, *Manual de informatică pentru clasa a V-a*, Editura CD-Press, 2017.

[6] *Minsdtorms EV3 – Ghid de Utilizare*, LEGO Group, 2013.

[7] L. Negrescu, L. Negrescu, *Construirea și programarea roboților LEGO Mindstorms EV3*, Editura Albastră, 2015.

[8] J. Olayvar, E. Lindberg, *LEGO Mindstorms EV3 Programming Basics*, Washington State Library, 2016.

PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU EXAMENE

Teste pentru examenul de Evaluare Națională

Testul 1

Maria Cristina Dinescu[1]

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Rezultatul calculului $5^2 - 3^2$ este egal cu:
   a) 2; b) 16; c) 4; d) 1.
2. Se consideră numerele $a = 1,2$ și $b = 2,4$. Raportul numerelor a și b este egal cu:
   a) $\frac{1}{2}$; b) 4; c) $\frac{1}{4}$; d) 1.
3. Soluția ecuației $-x + 6 = -4$ este:
   a) 2; b) -2; c) 10; d) -10.
4. Scrisă sub formă de interval, mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R} : 3x - 2 \geq 4\}$ este egală cu:
   a) $[-2, 2]$; b) $[2, +\infty)$; c) $[-2, +\infty)$; d) $(-\infty, 2]$.
5. Prețul unui produs este 80 lei. După o scumpire, prețul acestuia devine 88 lei. Cu ce procent s-a scumpit produsul?
   a) 8%; b) 10%; c) 100% d) 18%.
6. Ana, Luca, Petre și Irina calculează media geometrică a numerelor $\sqrt{50} - \sqrt{8}$ și $\sqrt{128} - \sqrt{8}$. Dintre cei patru elevi, cel care a obținut rezultatul corect a fost:

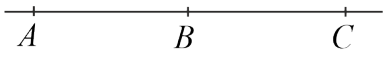
Ana	Luca	Petre	Irina
6	36	$6\sqrt{2}$	$18\sqrt{2}$

   a) Ana; b) Luca; c) Petre; d) Irina.

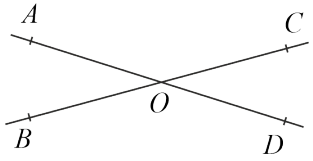
SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. În figura alăturată, A, B, C sunt trei puncte coliniare în această ordine.



   Știind că C este simetricul lui A față de B și că $AC = 8$ cm, atunci lungimea segmentului AB este:
   a) 4 cm; b) 8 cm; c) 16 cm; d) 5 cm.
2. În figura alăturată, unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle COD$ sunt opuse la vârf. Știind că $m(\sphericalangle AOC) = 2 \cdot m(\sphericalangle AOB)$, atunci măsura unghiului $\sphericalangle BOD$ este egală cu:



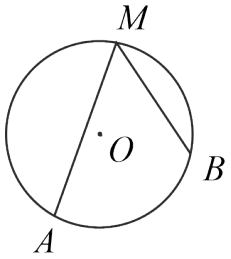
[1]Școala Gimnazială Argeșelu, cristinadinescu307@gmail.com

a) 60° C; b) 30° C; c) 35° C; d) 120° C.

3. Fie ABC un triunghi oarecare, cu perimetrul egal cu 37 cm. Se consideră M mijlocul segmentului $[AB]$ și N mijlocul segmentului $[AC]$. Dacă lungimea segmentului $AB = 9$ cm și $MN = 8$ cm, atunci lungimea segmentului $[AC]$ este egală cu:

a) 12 cm; b) 14 cm; c) 16 cm; d) 11 cm.

4. În figura alăturată, măsura arcului mic $\overset{\frown}{AB}$ este egală cu 106°. Măsura unghiului $\sphericalangle AMB$ este egală cu:



a) 106°; c) 60°;
b) 53°; d) 30°.

5. Suma tuturor muchiilor unui cub este egală cu 60 cm. Aria unei fețe a cubului este:

a) 30 cm^2; b) 60 cm^2; c) 25 cm^2; d) 20 cm^2.

6. Se consideră cubul $FURNICAT$. O furnică pornește din punctul F și ajunge în punctul T, traversând toate fețele laterale ale cubului. Știind că lungimea muchiei cubului este de 10 cm, atunci lungimea celui mai scurt drum este egală cu:

a) 10 cm; b) $10\sqrt{2}$ cm; c) $10\sqrt{3}$ cm; d) $10\sqrt{17}$ cm.

SUBIECTUL al III-lea

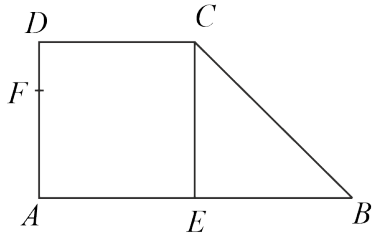
Scrieți rezolvările complete.

1. Împărțind două numere naturale, obținem câtul 5 și restul 3. Știind că diferența lor este egală cu 955, să se determine:
   a) cele două numere;
   b) cât la sută din numărul mai mic este numărul mai mare.

2. Se consideră expresia $E(x) = \left(\dfrac{2}{x-2} + \dfrac{x}{x+2}\right) : \dfrac{x^2+4}{x^2-x-2}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 2\}$.
   a) Verificați egalitatea $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$.
   b) Arătați că $E(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$.

3. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -3x + 6$.
   a) Arătați că $f(-1) \cdot f(2) = 0$.
   b) Determinați aria triunghiului delimitat de reprezentarea grafică a funcției f și axele de coordonate Ox și Oy ale sistemului de axe ortogonale xOy.

4. În figura alăturată, trapezul $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$ este dreptunghic, cu $m(\sphericalangle BAD) = m(\sphericalangle ADC) = 90°$. Fie $AB = 12$ cm, $CD = 4$ cm, $AD = 8$ cm. Punctul $E \in (AB)$ astfel încât $AE = 4$ cm și $F \in (AD)$ astfel încât $AF = 6$ cm.



   a) Aflați aria trapezului.
   b) Calculați măsura unghiului $\sphericalangle BCD$.

5. Un con circular drept are diametrul bazei egal cu 16 cm și înălțimea $4\sqrt{5}$ cm.
   a) Calculați generatoarea conului.
   b) Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului care reprezintă secțiunea axială a conului.

6. Fie $VABCD$ piramidă patrulateră regulată dreaptă, cu $VA = AB = 10$ cm, M mijlocul lui $[AB]$, N mijlocul lui $[BC]$.
   a) Aflați aria totală a piramidei.
   b) Calculați sinusul unghiului format de planele (VAD) și (VBC).

Testul 2

Daniela Georgescu[2]

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Rezultatul calculului $35 - 3 \cdot 7$ este numărul:
   a) 134; b) 14; c) 56; d) 224.
2. Dacă $x = 8$ și $y = 12$, raportul numerelor x și y are aceeași valoare cu raportul:
   a) $\frac{4}{8}$; b) $\frac{4}{12}$; c) $\frac{2}{3}$; d) $\frac{4}{3}$.
3. Suma numerelor întregi din intervalul $(-2, 4]$ este:
   a) 9; b) 10; c) 5; d) 14.
4. Media geometrică a numerelor $4 + \sqrt{12}$ și $4 - 2\sqrt{3}$ este:
   a) 3; b) 4; c) 1; d) 2.
5. Ionuț, Mihaela, Mădălin și Ioana au calculat jumătatea sumei dintre $5\sqrt{3}$, $-3\sqrt{3}$ și $4\sqrt{3}$. Rezultatele sunt cele din tabelul următor:

Ionuț	Mihaela	Mădălin	Ioana
$3\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$12\sqrt{3}$	$6\sqrt{3}$

   Elevul care a obținut rezultatul corect este:
   a) Ionuț; b) Mihaela; c) Mădălin; d) Ioana.
6. Propoziția: „Dacă 3 kg de mere costă 9 lei, atunci 10 kg de mere de același fel costă 18 lei.” este:
   a) adevărată; b) falsă.

SUBIECTUL al II-lea

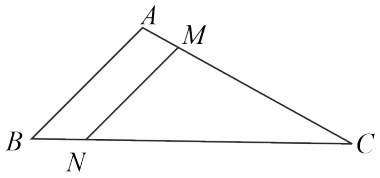
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. În figura alăturată, punctele A, B și C sunt coliniare, astfel încât $AB = 4$ cm, $BC = 6$ cm, iar M este mijlocul segmentului $[BC]$. Lungimea segmentului $[AB]$ este:

[2]Școala Gimnazială „Mircea Eliade”, Pitești, gedanutza@yahoo.com

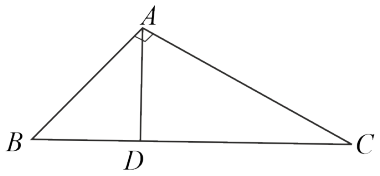
a) 6 cm; b) 7 cm; c) 5 cm; d) 8 cm.

2. În figura alăturată, punctele M și N aparțin dreptelor BC și AB, astfel încât dreptele MN și AC sunt paralele. Se știe că $m(\sphericalangle ABC) = 42°$ și $m(\sphericalangle BMN) = 51°$. Unghiul $\sphericalangle BAC$ are măsura egală cu:



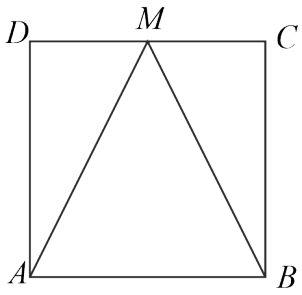
a) 51°; b) 42°; c) 87°; d) 48°.

3. Triunghiul dreptunghic din figura alăturată are ipotenuza $BC = 12$ cm, $m(\sphericalangle C) = 30°$, $AD \perp BC$. Lungimea segmentului BD este egală cu:



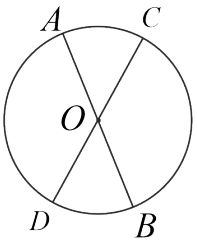
a) 9 cm; b) 6 cm; c) 3 cm; d) 12 cm.

4. Figura alăturată reprezintă schița unui teren de forma pătratului $ABCD$, cu latura de 60 m. Mijlocul laturii $[DC]$ a terenului este marcat prin punctul M. Pe suprafața triunghiului MAB s-a plantat gazon, restul terenului fiind pavat cu dale. Aria suprafeței pavate este egală cu:



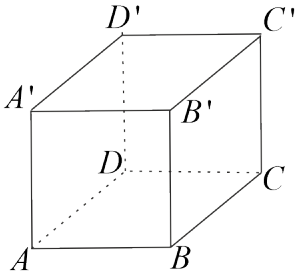
a) 1200 m^2; b) 1800 m^2; c) 2400 m^2; d) 3600 m^2.

5. În figura alăturată, AB și CD sunt diametre în cercul de centru O, iar măsura arcului mic $\overset{\frown}{AD}$ este 120°. Măsura unghiul $\sphericalangle BOD$ este egală cu:



a) 30°; c) 120°;
b) 90°; d) 60°.

6. O piesă metalică are forma paralelipipedului dreptunghic din figura alăturată, având dimensiunile de 2 cm, 1 cm, respectiv 0,5 cm. Cutia care conține 50 de astfel de piese are volumul egal cu:



a) 5 cm^3; c) 50 cm^3;
b) 500 cm^3; d) 25 cm^3.

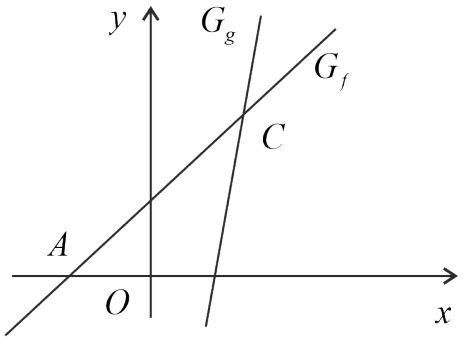
SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete.

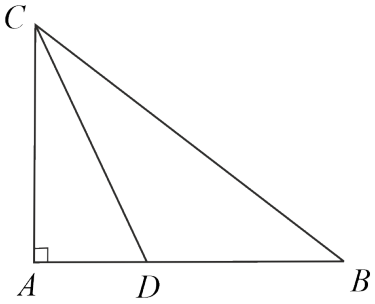
1. Prețul unui frigider s-a mărit cu 10%, apoi s-a micșorat cu 20%, ajungând să coste 1056 lei.
   a) Află prețul inițial al frigiderului.
   b) Află prețul frigiderului după mărire.

2. Se consideră expresia $E(x)=\left(\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{x}{x-18}\right):\dfrac{x-6}{x^2-20x+36}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{2,6,18\}$.
   a) Arată că, pentru orice număr real x, are loc egalitatea $x^2-20x+36=(x-2)(x-18)$.
   b) Demonstrează că suma $E(0)+E(1)+E(2)+...+E(10)$ este pătrat perfect.

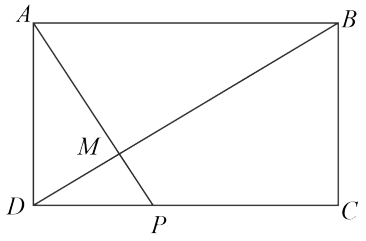
3. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=3x-4$.
   a) Determinați numărului real x pentru care $f(x)=g(x)$.
   b) Fie A și B punctele de intersecție a reprezentărilor grafice ale funcțiilor f, respectiv g cu axa Ox a sistemului de axe ortogonale xOy și C punctul lor comun. Calculează aria triunghiului ABC.



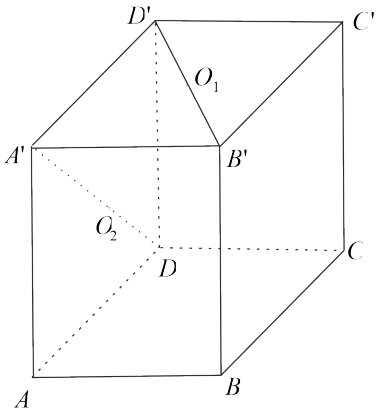
4. Triunghiul dreptunghic ABC din figura alăturată are ipotenuza $BC=10$ cm și cateta $AC=6$ cm. Punctul D aparține dreptei AB, astfel încât $AD=3$ cm.
   a) Arată că $DB=5$ cm.
   b) Află distanța de la punctul D la dreapta BC.



5. Dreptunghiul $ABCD$ din figura alăturată are $AB=8$ cm și $BC=6$ cm. Se știe că $AM\perp BD$, $M\in(BD)$ și $AM\cap DC=\{P\}$.
   a) Arată că $MB=6,4$ cm.
   b) Determină aria trapezului $ABCP$.



6. În figura alăturată este reprezentată o primsă dreaptă $ABCDA'B'C'D'$, cu baza $ABCD$ pătrat, în care $AB=6$ cm și $AA'=6\sqrt{3}$ cm. Punctul O_1 este centru fetei $A'B'C'D'$, iar O_2 este mijlocul diagonalei $[A'D]$.
   a) Arată că $AB'=12$ cm.
   b) Demonstrează că sinusul unghiului dintre dreptele O_1O_2 și BC' este egal cu $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$.



Testul 3

Daniela Nadia Taclit[3]

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Ana și George au hotărât să confecționeze pentru școală macheta unei clădiri sub formă de dreptunghi. Au notat datele pe hârtie și s-au apucat de treabă. Din greșeală, s-a răsturnat un pahar cu apă și a fost ștearsă lungimea clădirii. Să îi ajutăm să descopere lungimea clădirii, știind că are lățimea de 6 cm și perimetrul de 48 cm.

   a) 12 cm; b) 18 cm; c) 8 cm; d) 42 cm.

2. Mihai vrea să viziteze Londra. Biletul de avion dus/întors costă la firma X, 425 euro. Dacă biletul este cumpărat cu cel puțin 5 luni înainte de data plecării, va costa cu 20% mai puțin. Câți euro va costa biletul de avion dacă Andrei îl cumpără cu 6 luni față de data plecării?

   a) 85 euro; b) 350 euro; c) 338 euro; d) 340 euro.

3. Patru automobile trebuie să parcurgă o distanță. După o jumătate de oră, primul automobil a mers $\frac{3}{5}$ din distanță, al doilea $\frac{2}{21}$, al treilea $\frac{1}{9}$, iar al patrulea $\frac{6}{7}$ din distanță. Care automobil a parcurs o distanță mai mică după prima jumătate de oră?

   a) Primul automobil; c) Al treilea automobil;
   b) Al doilea automobil; d) Al patrulea automobil.

4. Vali și Ionuț au împreună 240 de timbre. Dacă Vali vinde 10 timbre și Ionuț cumpără 20, atunci cei doi copii au același număr de timbre. Câte timbre are Vali?

   a) 135; b) 115; c) 120; d) 125.

5. În cadrul unui proiect, elevii unei școli au plantat 1200 de stejari și fagi. Știind că $\frac{3}{5}$ din numărul stejarilor sunt fagi, aflați câți fagi s-au plantat?

   a) 750; b) 450; c) 150; d) 720.

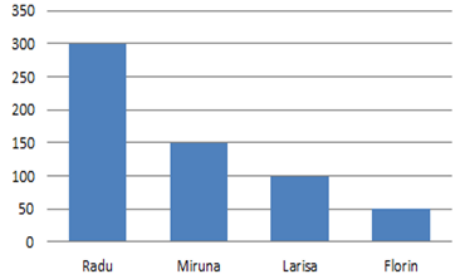
6. În urma votului pentru liderul elevilor din școala noastră, candidații au obținut următoarele rezultate:

Prenumele elevului	Nr. de voturi
Radu	100
Miruna	300
Larisa	50
Florin	150

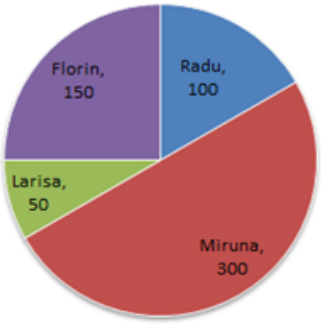
[3]Colegiul Național ,,Radu Greceanu”, Slatina, dana_taclit@yahoo.com

Care din următoarele grafice ilustrează corect rezultatele?

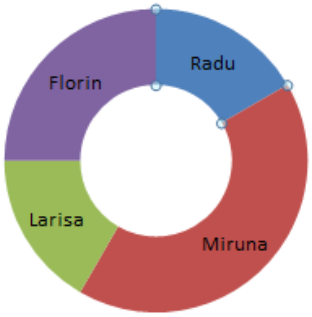
a)



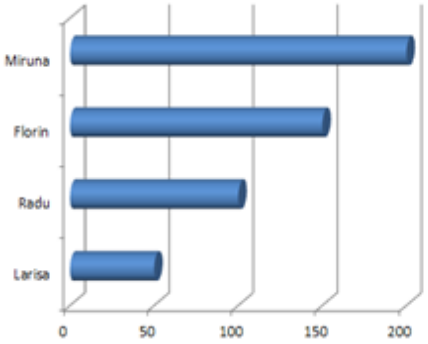
b)



c)



d)

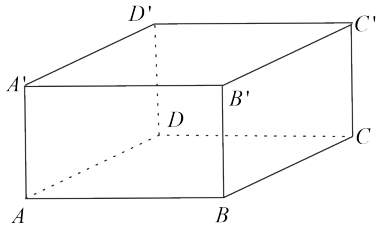


SUBIECTUL al II-lea

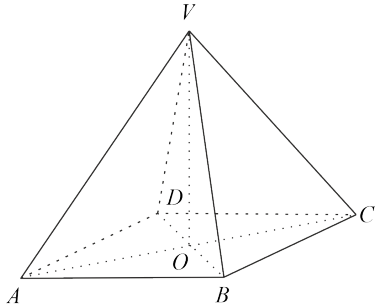
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Dacă raportul dintre un unghi și suplementul să este $\frac{3}{7}$, atunci măsua unghiului este:
   a) 60°; c) 54°;
   b) 18°; d) 30°.

2. Un paralelipiped dreptunghic de dimensiuni 40 cm, 50 cm și 27 cm este tăiat în 16 cuburi identice. Care este latura cubului?
   a) 10 cm; c) 15 cm;
   b) 12 cm; d) 27 cm.



3. Fie piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu $AB = 5\sqrt{2}$ cm și $VA = 13$ cm. Distanța de la V la planul (ABC) este egală cu:
   a) 10 cm; c) 25 cm;
   b) 12 cm; d) 5 cm.



4. Fie triunghiul ABC și unghiul exterior ACM cu măsura de 130°. Dacă măsura unghiului ABC este de 30°, atunci unghiul BAC este:
   a) unghi obtuz; c) unghi drept;
   b) unghi ascuțit; d) unghi alungit.

5. În triunghiul dreptunghic ABC, $m(\sphericalangle ABC) = 90°$, catetele au lungimile egale cu 3 cm, respectiv 4 cm. Raza cercului circumscris triunghiului are lungimea de:

a) 2,5 cm; b) 5 cm; c) 6 cm; d) 3 cm.

6. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ de latură 10 cm. Distanța de la punctul A' la dreapta CC' este egală cu:

a) 10 cm; b) 5 cm; c) $10\sqrt{2}$ cm; d) $5\sqrt{2}$ cm.

SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete.

1. Mihai are un frate, Andrei, a cărui vârstă se poate calcula astfel:

$$V = \sqrt{(-7+1)^2} - |-5+3| + |-8| - (-10).$$

a) Care este vârsta lui Andrei?
b) Ce vârstă are tatăl copiilor acum dacă, peste 5 ani vârsta sa va fi dublul vârstei lui Andrei?

2. La un concurs de matematică au fost premiați 13 elevi astfel: Premiul I cu câte 300 lei de elev, Premiul al II-lea cu câte 200 lei de elev, 2 elevi au primit Premiul pentru originalitate în valoare de câte 100 lei de elev. Suma totală alocată concursului, pentru această premiere a fost de 2800 lei.

a) Câți elevi au obținut Premiul I și câți elevi au obținut Premiul al II-lea?
b) Care este procentul elevilor premiați, știind că la concurs au participat 65 de elevi.

3. **M**IOARA, **I**OANA, **S**IMONA și **A**LICIA sunt finalistele concursului ,,Miss-școala noastră". Pentru desemnarea câștigătoarei, ,,juriul concursului" format din 5 elevi a completat următorul tabel cu inițiala numelui participantei-favorită/apreciată-la fiecare probă:

Nr. juriu	Proba10,,prezentare"	Proba2,,isteșime"	Proba3,,talent"	Proba4,,eleganță"
1	A	I	M	S
2	S	A	I	S
3	S	S	S	A
4	I	A	I	S
5	A	M	A	M

a) Calculează numărul de aprecieri, din partea juruiului, pentru fiecare concurentă și completează tabelul:

Nume concurentă	Total aprecieri-concurs
Mioara	
Ioana	
Simona	
Alicia	

Conform aprecierilor, care este ,,posibila" câștigătoare? ,,Posibila" câștigătoare este ... .

b) Probele de concurs sunt punctate astfel:

- proba de ,,prezentare" este cotată cu 20 puncte-pondere
- proba de ,,isteșime" este cotată cu 40 puncte-pondere
- proba de ,,talent" este cotată cu 30 puncte-pondere
- proba de ,,eleganță" este cotată cu 10 puncte-pondere

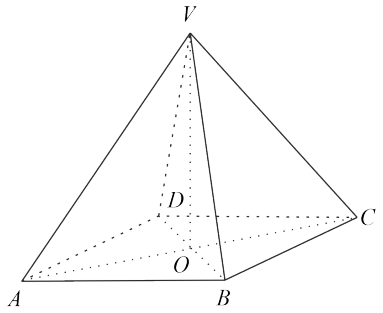
Completează următorul tabel cu punctajul și media obținute de fiecare concurentă, unde media este calculată ca medie ponderată a celor 4 probe din concurs!

EXEMPLU: $\frac{20 \cdot 0 + 40 \cdot 1 + 30 \cdot 1 + 10 \cdot 1}{100} = \frac{80}{100} = 0,80$, **medie MIOARA**, unde 0, 1, 1, 1 reprezintă numărul de apariții-aprecieri la prima probă, a doua probă, a treia probă, respectiv a patra probă, iar 20, 40, 30, 10 cota-ponderea probelor de concurs.

NUME CONCURENTĂ	TOTAL PUNCATJ	MEDIE CONCURS
Mioara	80	0,80
Ioana		
Simona		
Alicia		

Câștigătoarea concursului este declarată cea cu media cea mai mare. Atunci, ,,MISS ȘCOALA NOASTRĂ" este... .

4. Se consideră expresia: $E(x) = \left(\frac{3}{x^2-1} + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x+1}\right) : \frac{x+5}{x^2-1}$.
   a) Determinați valorile lui x pentru care expresia nu are sens.
   b) Determinați valorile lui x întregi pentru care expresia este un număr natural.
5. a) Determinați funcția de gradul I, $f(x) = mx + n$, știind că graficul său este dreapta AB unde $A(-1, 2)$ și $B(2, 3)$.
   b) Dacă A' și B' sunt proiecțiile punctelor A, respectiv B pe axa Ox, calculați aria patrulaterului $ABB'A'$.
6. Fie piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu $AB = 5$ cm și $VA = 13$ cm. Calculați:
   a) Distanța de la punctul B la muchia $[CV]$.
   b) O furnică pleacă din punctul D și merge până pe fețele laterale ale piramidei. Aflați lungimea drumului celui mai scurt.



Testul 4

Florentina-Alina Ștefan[4]

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Se consideră ecuațiile $2^{9-x} = 128$ și $3^{y+4} = 729$. Atunci $\frac{x}{y} = ...$

[4]Universitatea din Pitești, florentina.stefan@upit.ro

a) -1; b) 0; c) 2; d) 1.

2. La dublul numărului $\overline{ab}$ se adaugă o treime din răsturnatul său, obținându-se 139. Aflați numărul $\overline{ab}$, știind că a și b sunt numere prime.

a) 57; b) 79; c) 58; d) 19.

3. Dacă $x =\mid 5-7^n \mid - \mid 3-7^n \mid$, $n \in \mathbb{N}^\star$, atunci jumătatea lui x este ...

a) 8; b) 4; c) 1; d) -1.

4. Dacă numărul $2^{2021} \cdot 5^{2022} + x$ este divizibil cu 3, atunci cea mai mică valoare naturală a lui x este ...

a) 1; b) 4; c) 2; d) 3.

5. Dacă $a = \sqrt{4-\sqrt{7}}$ și $b = \sqrt{\sqrt{7}+4}$ atunci valoarea raportului $\dfrac{(a+b)^2}{(a-b)^2}$ este egal cu ...

a) 2; b) 4; c) 5; d) 7.

6. Dacă $n \in \mathbb{N}$, atunci c.m.m.d.c. al numerelor $2n$ și $2n+1$ este egal cu ....

a) 2; b) 3; c) 1; d) $2n$.

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Dacă lungimea laturii unui romb egală cu 5 este medie geometrică a diagonalelor sale, atunci aria rombului este ...

a) 5 cm^2; b) 25 cm^2; c) 50 cm^2; d) 12,5 cm^2.

2. Fie pătratul $ABCD$, $AC \cap BD = \{O\}$ și M simetricul lui O față de latura AD. Atunci $AODM$ este un ...

a) paralelogram; c) romb;
b) dreptunghi; d) pătrat.

3. Se consideră triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC = 2\sqrt{2}$ cm și măsura unghiului A egală cu 30°. Dacă D este mijlocul laturii $[AC]$, atunci aria triunghiului BDC este egală cu ...

a) 6 cm^2; b) 2 cm^2; c) 4 cm^2; d) 1 cm^2.

4. Se consideră în planul xOy punctele: $A(4;-2)$, $B(4;4)$ și $C(-4,-2)$. Lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC este egală cu ...

a) 4 u.m; b) 5 u.m; c) 2 u.m; d) 6 u.m.

5. Triunghiul dreptunghic și isoscel ABC cu $m(\sphericalangle A) = 90°$ și $AB = AC$ are aria egală cu 18 cm^2. Fie $M \in (BC)$ astfel încât $\sphericalangle CAM \equiv \sphericalangle BAM$. Atunci lungimea segmentului AM este egală cu ...

a) 9 cm; b) $3\sqrt{2}$ cm; c) $6\sqrt{2}$ cm; d) $18\sqrt{2}$ cm.

6. Raportul dintre aria laterală a cubului $ABCDA'B'C'D'$ și aria triunghiului ACC' este egal cu ...

a) $4\sqrt{2}$; b) 1; c) $\sqrt{2}$; d) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete.

a) Numerele naturale a și b împărțite la 6 dau același rest. Să se arate că pătratul diferenței celor două numere este divizibil cu 4.

b) Mihai a obținut cu 6 puncte mai mult decât la examenul anterior, la care avusese un rezultat de 30 de puncte. Maria, cu 30 de puncte mai mult față de rezultatul anterior, la care a obținut 60 de puncte. Aflați progresul fiecărui copil.

c) Se consideră expresia $E(x) = \dfrac{x^3+2x^2+x+1}{x} - \dfrac{2x^3+x^2+x-1}{x^2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   a) Arătați că $E(x) > 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   b) Dacă $E(x) = 3$, atunci calculați valoarea expresiei $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

d) Se consideră funcțiile liniare $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x + 4$, $g(x) = x + 4$ și $h(x) = -2$. A, B, C reprezintă punctele de intersecție dintre graficele funcțiilor: $\{A\} = G_f \cap G_g$, $\{B\} = G_h \cap G_f$ și $\{C\} = G_g \cap G_h$.

   a) Determinați distanta dintre A și B.

   b) Determinați coordonatele punctului ce reprezintă centrul de greutate al triunghiului format de punctele A, B și C.

e) Fie punctul O centrul cercului circumscris triunghiului dreptunghic ABC, în care $m(\sphericalangle A) = 90°$ și $m(\sphericalangle C) = 30°$. Perpendiculara în O pe BC intersectează latura AC în punctul M. Dacă $AC = 6\sqrt{3}$ cm, calculați:

   a) aria triunghiului BOM.

   b) sinusul unghiului $\sphericalangle AOB$.

f) În cubul $ABCDA'B'C'D'$ sunt introduse 27 de cutiuțe cubice cu latura de 1 cm, fără spații goale între ele. Să se calculeze:

   a) raportul dintre aria triunghiului $A'OC'$ și aria triunghiului $D'AC$, unde $\{O\} = AC \cap BD$.

   b) măsura unghiului dintre dreptele $A'C'$ și $D'B$.

Testul 5

Ștefania Vărzaru [5]

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Rezultatul calculului $2021^0 + 2121 : \sqrt{441}$ este:

   a) 101; b) 102; c) 13; d) 10^2.

2. Suma numerelor întregi din intervalul $(-6, 7]$ este:

   a) 1; b) 7; c) 13; d) 18.

3. Media aritmetică a numerelor: 10, $20 + \sqrt{5}$ și $60 - \sqrt{5}$ este:

   a) 30; b) 45; c) $90\sqrt{5}$; d) $-90\sqrt{5}$.

[5]Școala Gimnazială Nr.1, comuna Drăgoești, Vâlcea, stefania.varzaru@gmail.com

4. Dacă $\frac{a}{b} = 25\%$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^\star$, atunci:
   a) $a = 4b$; b) $b = 4a$; c) $\frac{b}{a} = 75\%$; d) $a = b$.
5. Dacă $\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{5})^2} - |\sqrt{2}+\sqrt{5}| = n$, atunci
   a) $n = 0$; b) $n = -\sqrt{10}$; c) $n = -2\sqrt{2}$; d) $n = 2\sqrt{2}$.
6. În tabelul următor sunt trecute notele obținute de elevii clasei a VIII-a la un test de evaluare.

Nota	4	5	6	7	8	9	10
Număr de elevi	3	2	3	7	4	4	2

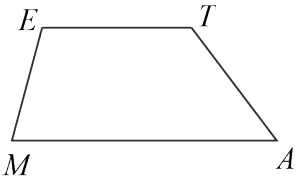
Nota 6 a fost obținută de
   a) 12% din elevii clasei; c) 28% din elevii clasei;
   b) 16% din elevii clasei; d) 30% din elevii clasei.

SUBIECTUL al II-lea

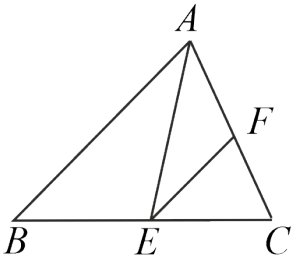
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. În figura alăturată, punctele A, B, C, D și E, în această ordine sunt coliniare. Dacă $AB = 3$ cm, $BC = 1$ cm, $CD = 4$ cm și $DE = 2$ cm, atunci lungimea segmentului $[AE]$ este:

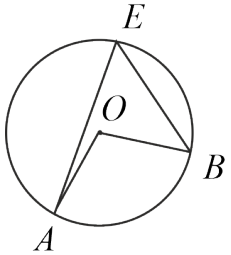
   a) 8 cm; b) 12 cm; c) 9 cm; d) 10 cm.
2. În figura alăturată este reprezentat trapezul $MATE$, $MA \parallel ET$, $MA > ET$, unghiul ETA de măsură 150° și unghiul MET de măsură 135°. Atunci:



   a) $m(\sphericalangle MAT) + m(\sphericalangle EMA) = 180°$; c) $m(\sphericalangle MAT) = 45°$;
   b) $m(\sphericalangle EMA) = 45°$; d) $m(\sphericalangle EMA) = m(\sphericalangle ETA)$.
3. În figura alăturată $\triangle ABC$ are $m(\sphericalangle A) = 66°$, [$AE$ este bisectoarea unghiului BAC și $EF \parallel AB$. Triunghiul AEF este:

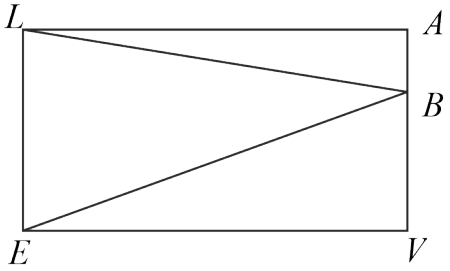


   a) echilateral; c) dreptunghic;
   b) dreptunghic isoscel; d) isoscel.
4. În figura următoare este reprezentat cercul de centru O și A, B, E trei puncte distincte pe cerc, punctul E este situat pe arcul mare $\overset{\frown}{AB}$. Dacă $m(\sphericalangle AOB) = 80°$, atunci $m(\sphericalangle AEB)$ este egală cu:



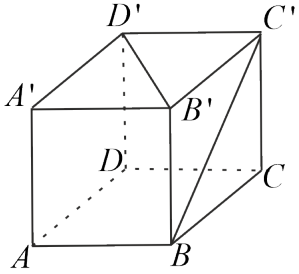
   a) 40°; c) 60°;
   b) 30°; d) 45°.

5. Aria dreptunghiului $EVAL$ din figura alăturată este egală cu $52\sqrt{2}$ cm^2. Fie B un punct pe latura VA a dreptunghiului. Atunci aria triunghiului EBL este:



a) $17\sqrt{2}$ cm^2; c) $26\sqrt{2}$ cm^2;
b) $104\sqrt{2}$ cm^2; d) $52\sqrt{2}$ cm^2;

6. În figura alăturată este reprezentat cubul $ABCDA'B'C'D'$. Măsura unghiului format de dreptele $C'B$ și $D'B'$ este:



a) 30°; c) 60°;
b) 45°; d) 90°.

SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete.

1. Un număr natural dă același rest egal cu 3 la împărțirea cu 4 și cu 7.
   a) Verificați dacă numărul poate fi egal cu 87.
   b) Determinați cel mai mic număr natural de trei cifre care îndeplinește condiția dată.
2. Se consideră expresia $E(x) = \left(\dfrac{x}{x^2-x} + \dfrac{x+2}{2+x-2x^2-x^3} + \dfrac{x^2}{x^2+x}\right) \cdot \left(x - \dfrac{1}{x}\right)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0, 1\}$.
   a) Arătați că $E(2) = 2$.
   b) Arătați că $E(x) = x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0, 1\}$.
3. Se consideră numerele reale a și b astfel: $a = \left(\dfrac{5}{6} + 13 \cdot 6^{-1}\right) \cdot \sqrt{2}$ și $b = \dfrac{5}{\sqrt{2}} \cdot \left(\sqrt{8} - \sqrt{2}\right) : (\sqrt{3} - \sqrt{2})$.
   a) Arătați că $a = 3\sqrt{2}$.
   b) Arătați că $N = \sqrt{\dfrac{4(a+b)}{8\sqrt{2}+5\sqrt{3}}} \in \mathbb{N}$.
4. Secțiunea axială $ABA'B'$ a unui cilindru circular drept este un pătrat. Punctele A, M, B, N sunt situate pe cercul ce reprezintă baza cilindrului (în ordinea dată), astfel încât $AMBN$ este pătrat, iar distanța de la punctul A' la dreapta MB este egală $6\sqrt{6}$. Aflați:
   a) aria desfășurării laterale a cilindrului.
   b) sinusul unghiului format de dreptele $A'M$ și AN.

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Științe ale naturii

Testul 1

Marius Macarie [1]

SUBIECTUL I

1. Să se determine partea imaginară a numărului complex $z = \left(\frac{2+i}{2-i}\right)^2$.
2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + (m-3)x + 3$. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât vârful parabolei asociate funcției f să se afle pe axa Ox.
3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 - x - 2} = 3^{\log_3 \sqrt{x-1}}$.
4. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă cifra unităților un pătrat perfect.
5. În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$, $B(m,-3)$ și $C(3,0)$. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât aria triunghiului ABC să fie egală cu 6.
6. Să se calculeze $\cos\frac{5\pi}{12} - \cos\frac{\pi}{12}$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & a+1 & a+1 \\ 3 & a+2 & 2a+1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ 2x + (a+1)y + (a+1)z = 2 \\ 3x + (a+2)y + (2a+1)z = 3 \end{cases}.$$

   a) Să se arate că $\det(A^3(1)) = 0$.
   b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care matricea $A(a)$ are rangul egal cu 2.
   c) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul are soluție unică $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

2. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x \circ y = x + y - \frac{xy}{5}$.

   a) Să se arate că $x \circ y = -\frac{1}{5}(x-5)(y-5) + 5$, $x, y \in \mathbb{R}$.
   b) Să se demonstreze că legea de compoziție este asociativă și să se calculeze $\sqrt[3]{1} \circ \sqrt[3]{2} \circ \ldots \circ \sqrt[3]{2022}$.
   c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $x \circ x \circ x \circ x = e$, unde e este elementul neutru al legii „$\circ$”.

SUBIECTUL al III-lea

1. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{4x^2 + 2x + 1} - 2x$.

   a) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - 1}{x}$.
   b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcției f.
   c) Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2 + 9}$.

   a) Să se arate că $\int_0^3 \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\pi}{12}$.
   b) Să se arate că orice primitivă a funcției f are două puncte de inflexiune.
   c) Să se calculeze $\int_0^3 f^2(x)\,\mathrm{d}\,x$.

[1]Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, macariem@yahoo.com

Testul 2

Raluca Mihaela Georgescu [2]

SUBIECTUL I

1. Să se afle suma primilor 5 termeni ai unei progresii aritmetice, știind că al treilea termen este egal cu 5.
2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + (m+1)x + 4$, unde $m \in \mathbb{R}$. Să se determine $m > 0$ astfel încât axa Ox să fie tangentă graficului funcției f.
3. Să se rezolve ecuația $3^{x^2+3} = 9^{x+1}$.
4. Să se calculeze probabilitatea ca alegând un număr dintre P_4, C_4^2 și A_4^2, acesta să fie divizibil cu 12.
5. Să se determine lungimea înălțimii dusă din vârful A al triunghiului ABC, știind că $A(1,1)$, $B(2,3)$ și $C(4,6)$.
6. Să se determine $\operatorname{ctg} x$, știind că $x \in \left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ și $\sin x = -\dfrac{3}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Fie $A(a) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ a & 1 & 2 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$ cu $a \in \mathbb{R}$.
   a) Să se calculeze $\det A(1)$.
   b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât A să fie inversabilă.
   c) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $\det(A(a) + I_3) = 0$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = 3xy - 6x - 6y + 14$.
   a) Să se arate că $x \circ y = 3(x-2)(y-2) + 2$, pentru orice numere reale x, y.
   b) Să se rezolve inecuația $x \circ x \leq 14$.
   c) Să se calculeze $\sqrt{1} \circ \sqrt{2} \circ \cdots \circ \sqrt{2021}$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Fie funcția $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2+3x+2}$.
   a) Să se arate că $f'(x) = \dfrac{-(x^2+6x+7)}{(x^2+3x+2)^2}$, $x \in (-1, \infty)$.
   b) Să se arate că f admite asimptotă verticală.
   c) Să se arate că $f(x) \leq \frac{3}{2}$, pentru orice $x \in [0, \infty)$.
2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+4}}$.
   a) Să se arate că $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{x^2+4} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \frac{5}{2}$.
   b) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^{\sqrt{5}} f(x)\,\mathrm{d}\,x$.
   c) Să se arate că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe $[0, \infty)$.

[2]Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, gemiral@yahoo.com

Testul 3

Mihai Florea Dumitrescu [3]

SUBIECTUL I

1. Calculați numărul real a pentru care numerele $\sqrt{6}, \sqrt{2}+\sqrt{8}$ și a sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}-\{0,2\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x-1}{x(x-2)}$. Arătați că punctul $A(1,0)$ este centru de simetrie pentru graficul funcției f.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{\log_5 3}=3^{\log_5\left(x^2+1\right)}$.
4. Determinați numărul submulțimilor cu număr par de elemente ale mulțimii $\{1,2,3,4,5\}$.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$, $B(-1,0)$ și $C(0,-2)$. Aflați aria patrulaterului concav $ABCO$.
6. Aflați $x\in(0,\pi)$ astfel încât $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2&0\\2&2\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.
   a) Arătați că $\det(2022\cdot A)=2^4\cdot 3^2\cdot 337^2$.
   b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $A^2+4I_2=(x-2018)A$.
   c) Rezolvați în $M_2(R)$ ecuația $X^2=A$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=nxy-nmx-nmy+nm^2+m$, unde m și n sunt numere naturale nenule, $m<n$.
   a) Arătați că $x*y=n(x-m)(y-m)+m$ pentru orice numere reale x și y.
   b) Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația $x*x=m+n$.
   c) Calculați $1*2*3*\ldots*n$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcția $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x^2+1}$.
   a) Calculați $f'(1)$.
   b) Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x\cdot f(x)$.
   c) Stabiliți intervalele de monotonie ale funcției f.
2. Se consideră funcțiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_n(x)=e^{nx}+nx$, unde n este un număr natural nenul.
   a) Aflați primitiva F_n a funcției f_n cu proprietatea că $F_n(0)=2022$.
   b) Calculați $\displaystyle\int_0^1 x\cdot f_1(x)\mathrm{d}x$.
   c) Calculați $\displaystyle\int_0^n x\cdot f_n(x)\mathrm{d}x$, unde n este un număr natural nenul.

[3]Profesor, Liceul „Ștefan Diaconescu”, Potcoava, florin14mihai@yahoo.com

Testul 4

Marius Macarie [4]

SUBIECTUL I

1. Să se arate că $\sqrt{17-12\sqrt{2}}+3^{\frac{\log_3 8}{2}}$ este număr natural.
2. Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(\sqrt{5}+2\right)^x+\left(\sqrt{5}-2\right)^x$ este pară.
3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $4^{x+1}-7\cdot 10^x+3\cdot 25^x=0$.
4. Să se determine termenul care îl conține pe x^4 din dezvoltarea $\left(5x-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^7$.
5. Fie ABC un triunghi care are $AB=3\sqrt{2}$, $AC=3$ și $BC=4$. Să se calculeze $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}$.
6. Să se determine $\sin x$, știind că $x\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ și $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{5}{13}$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricea $X(a,b)=\begin{pmatrix} a & b \\ 5b & a \end{pmatrix}$ unde a și b sunt numere reale.
   a) Să se arate că $\det\left(X(-1,2)+X(2,-1)\right)=-4$.
   b) Să se demonstreze că $X(a,b)\cdot X(c,d)=X(ac+5bd,ad+bc)$ pentru orice numere reale $a,b.c.d.$
   c) Să se determine matricea $U\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $U\cdot X(9,4)=X(1,1)$.
2. Pe mulțimea $G=(1,\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=x^{\ln y}$.
   a) Să se demonstreze că legea „$*$” este asociativă.
   b) Să se determine simetricul lui $\sqrt{e}$ în raport cu legea „$*$”.
   c) Să se determine $a\in(1,\infty)$ pentru care funcția $f:(0,\infty)\to(1,\infty)$, $f(x)=a^x$ este izomorfism între grupurile $((0,\infty),\cdot)$ și $(G,*)$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(x^2-x+1)-\ln(x^2+x+1)$.
   a) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.
   b) Să se determine mulțimea valorilor funcției f.
   c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot f(x)$.
2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{2x^2+4x+5}$.
   a) Să se arate că $\displaystyle\int_0^2 f^2(x)\,\mathrm{d}\,x=\frac{70}{3}$.
   b) Să se calculeze $\displaystyle\int_{-2}^1 \frac{x+1}{f^3(x)}\,\mathrm{d}\,x$.
   c) Să se arate că orice primitivă a lui f este concavă pe intervalul $(-\infty,-1]$.

[4]Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, macariem@yahoo.com

Testul 5

Liliana Stănescu și *Daniela Matei* [5]

SUBIECTUL I

1. Să se determine numărul natural x din ecuația $1+4+7+10+\ldots+x=210$.
2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $2x^2+3x+1<0$.
3. Să se arate că $f:(0,+\infty)\to(3,\infty)$, $f(x)=x^2+3$ este bijectivă și să se determine inversa ei.
4. Se consideră mulțimea $A=\{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l\}$. Să se determine numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii A, care conțin elementul a.
5. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât distanța dintre punctele $A(-2,m)$ și $B(m,-2)$ să fie 6.
6. Să se calculeze $\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{23\pi}{12}$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}3&3\\1&1\end{pmatrix}$, $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   a) Să se arate că există $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $A^2=mA$.
   b) Să se calculeze $(A-{}^tA)^{2022}$.
   c) Să se rezolve ecuația $X^2=A$, unde $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Pentru x și y din mulțimea $M=[0,\infty)$ se definește operația $x*y=\log_3(3^x+3^y-1)$.
   a) Să se arate că „$\star$” este lege de compoziție pe M.
   b) Să se arate că legea de compoziție „$\star$” este asociativă.
   c) Să se determine elementul neutru al legii de compoziție.

SUBIECTUL al III-lea

1. Fie $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{9-x^2}{x}$.
   a) Să se determine domeniul maxim de definiție al funcției f.
   b) Să se determine asimptotele funcției f.
   c) Să se arate că $f(x)\le 8$, $\forall\, x\in[1,\infty)$.
2. Se consideră funcțiile $f,F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, date prin $f(x)=\dfrac{2}{x\sqrt{x^2+4}}$ și $F(x)=\ln\left(\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}\right)$.
   a) Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f.
   b) Să se arate ca F este strict crescătoare pe intervalul $(0,\infty)$.
   c) Să se calculeze aria suprafeței cuprinse între dreptele de ecuații $x=1$ și $x=2$, graficul funcției f și axa Ox.

[5]Masteranzi – Matematică didactică, Anul 1, Universitatea din Pitești

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Matematică-Informatică

TESTUL 1

Raluca Mihaela Georgescu[1]

SUBIECTUL I (30p)

1. Să se arate că numărul $\log_2 128 + 3^{\log_3 2} + \sqrt[3]{216}$ este număr natural. **(5p)**

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3x + m^2 - 1$, $m \in \mathbb{R}$. Să se determine valoarea parametrului real m, ştiind că ecuaţia $f(x) = 0$ are rădăcini reale de semne contrare. **(5p)**

3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\log_5(x - \sqrt{5}) + \log_5(x + \sqrt{5}) - \log_5 2 = 1$. **(5p)**

4. Fie $A = \{\sqrt{2}, \sqrt{2^2}, \ldots, \sqrt{2^{2021}}\}$. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea A, acesta să fie pătrat perfect. **(5p)**

5. Să se determine ecuaţia mediatoarei segmentului $A(1, 1)$, $B(3, -2)$. **(5p)**

6. Să se afle aria triunghului ΔABC, ştiind că $AB = \sqrt{10}$, $AC = 4$, $\operatorname{tg} A = 3$. **(5p)**

SUBIECTUL al II-lea (30p)

1. Fie $A(a) = \begin{pmatrix} 2^a & 2^a & 3^a \\ 3^a & 2^a & 2^a \\ 2^a & 3^a & 2^a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $\det A(2)$. **(5p)**

b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care matricea $A(a)$ nu este inversabilă. **(5p)**

c) Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuaţia $\det(A(1) - xI_3) = 0$. **(5p)**

2. Pe mulţimea $\mathbb{R}$, se defineşte legea de compoziţie

$$x \circ y = xy - \sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 2 + \sqrt{2}.$$

a) Să se arate că $x \circ y = (x - \sqrt{2})(y - \sqrt{2}) + \sqrt{2}$, $x, y \in \mathbb{R}$. **(5p)**

b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $x \circ \ldots \circ x = x$, "$\circ$" fiind de 2021 de ori. **(5p)**

c) Să se determine valoarea expresiei $E = 2^{\frac{1}{2}} \circ 2^{\frac{1}{2^2}} \circ \ldots + 2^{\frac{1}{2^{2021}}}$. **(5p)**

SUBIECTUL al III-lea (30p)

1. Fie $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^2 - 1}$.

a) Să se verifice că $f'(x) = \dfrac{-x(x^2 + 3)}{\sqrt{x^2 + 1}(x^2 - 1)^2}$. **(5p)**

b) Să se determine asimptotele la graficul funcţiei f. **(5p)**

c) Să se determine intervalele de monotonie ale lui f. **(5p)**

[1]Lect. univ. dr., Universitatea din Piteşti, gemiral@yahoo.com

2. Se consideră $f,\ F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{x(2-\sqrt{x^2+1})}{x^2+1},\ F(x)=a\ln(x^2+1)-b\sqrt{x^2+1},\ a,b\in\mathbb{R}.$$

a) Să se calculeze $\int_0^1 (x^2+1)f(x)dx$. **(5p)**

b) Să se determine a şi $b\in\mathbb{R}$ astfel încât F să fie o primitivă a lui f pe $\mathbb{R}$. **(5p)**

c) Pentru $a=b=1$, să se calculeze $\int_0^1 f(x)F(x)dx$. **(5p)**

TESTUL 2

Mădălin Avram [2]

SUBIECTUL I (30p)

1. Să se afle al doilea termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $b_1\cdot b_2\cdot b_3=-216$. **(5p)**

2. Să se determine funcţia de gradul întâi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, strict crescătoare, pentru care $f\circ f(x)=4x+3$, pentru oricare $x\in\mathbb{R}$. **(5p)**

3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\log_5(9-x^2)-\log_5(6-2x)=0$. **(5p)**

4. Fie $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$. Să se determine probabilitatea ca, alegând o submulţime a lui A, aceasta să aibă toate elementele numere prime. **(5p)**

5. Se consideră punctele A, B, C, astfel încât $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{i}+6\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{BC}=9\overrightarrow{i}-3\overrightarrow{j}$. Să se determine raza cercului circumscris triunghiului ABC. **(5p)**

6. Dacă $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ şi $\sin x=\frac{12}{13}$, să se calculeze $\sin 2x$. **(5p)**

SUBIECTUL al II-lea (30p)

1. Fie sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x+ay=4\\ y+2az=13\\ 2x+z=7\end{cases}$, $a\in\mathbb{R}$ şi A matricea asociată sistemului.

a) Să se că $\det A\neq 0$, pentru oricare $a\in\mathbb{R}$. **(5p)**

b) Pentru $a=1$, să se arate că soluţia sistemului este formată din 3 numere în progresie aritmetică. **(5p)**

c) Să se determine inversa matricei A. **(5p)**

2. Pe $\mathbb{R}$, se defineşte legea de compoziţie

$$x\circ y=xy-3x-3y+12,\ x,\ y\in\mathbb{R}.$$

a) Să se arate că legea de compoziţie "$\circ$" este este asociativă. **(5p)**

[2]Liceul Tehnologic Auto, Curtea de Argeş, avrammadalin@yahoo.com

b) Să se rezolve în mulţimea numerelor întregi ecuaţia $a \circ b = 10$. **(5p)**

c) Să se calculeze $(\lg 1) \circ (\lg 2) \circ \ldots \circ (\lg 2022)$. **(5p)**

SUBIECTUL al III-lea (30p)

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln(e^x + 1)$.

a) Să se arate că $\lim\limits_{x \to \infty} x^a f(x) = 0$, pentru oricare $a \in \mathbb{R}$. **(5p)**

b) Să se determine ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei. **(5p)**

c) Să se arate că funcţia f' este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$. **(5p)**

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 + 3x + 7}{x^2 + 1}$.

a) Să se calculeze $\displaystyle\int (f(x) - x - 3)dx$. **(5p)**

b) Să se calculeze $\displaystyle\int f(x)dx$. **(5p)**

c) Să se determine primitiva $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a funcţiei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = (x^2 + 1)f(x)$ pentru care $G(1) = \frac{3}{4}$. **(5p)**

TESTUL 3

Emilia Jinga [3]

SUBIECTUL I (30p)

1. Să se determine numerele reale a şi b, ştiind că $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3 = a + bi$. **(5p)**

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$. Să se arate că parabola (grafic al funcţiei) este tangentă axei Ox. **(5p)**

3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\log_3(x^2 - 4) = 1 + \log_3(2x - 4)$. **(5p)**

4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă ultimele două cifre care să formeze un număr divizibil cu 9. **(5p)**

5. Se consideră vectorii $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{v} = a\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$. Să se determine numărul real a pentru care vectorii sunt ortogonali. **(5p)**

6. Să se calculeze lungimea laturii AB a triunghiului ABC, în care $AC = 2$, $BC = \sqrt{3}$ şi $A = \dfrac{\pi}{3}$. **(5p)**

SUBIECTUL al II-lea (30p)

1. Se consideră matricea $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se arate că $\det A = 6$. **(5p)**

[3]Colegiul Naţional Vlaicu-Vodă, Curtea de Argeş, emilia.jinga@cn-vlaicuvoda.info

b) Să se demonsreze că, dacă $A \cdot X = X \cdot A$, unde $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, atunci există a, b, $c \in \mathbb{C}$ astfel încât $X = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$. **(5p)**

c) Să se determine $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ astfel încât $X^{2021} = A$. **(5p)**

2. Pe mulţimea $M = (0, 1)$, se defineşte legea de compoziţie asociativă

$$x \circ y = \frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)},\ x,\ y \in M.$$

a) Să se arate că $e = \frac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziţie "$\circ$". **(5p)**

b) Să se determine $x \in M$ pentru care $x \circ x \circ x = 1$". **(5p)**

c) Să se arate că nu există nici un element $x \in M$ pentru care simetricul său în raport cu legea "$\circ$" să fie egal cu $\frac{1}{x}$. **(5p)**

SUBIECTUL al III-lea (30p)

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{e^{x+1}}{x+1}$.

a) Să se arate că $f'(x) = e^{x+1}\dfrac{x}{(x+1)^2}$, pentru oricare $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. **(5p)**

b) Să se determine numărul real a, $a \neq -1$, ştiind că tangenta la graficul funcţiei în punctul $(a, f(a))$ este paralelă cu axa Ox. **(5p)**

c) Să se demonstreze că $f(x) \geq e$, pentru oricare $x \in (-1, \infty)$. **(5p)**

2. Se consideră funcţia $f : (0, 4) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{4-x}$.

a) Să se calculeze $\displaystyle\int_1^e (4-x)f(x)dx$. **(5p)**

b) Să se arate că $\displaystyle\int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 f(4-x)dx$. **(5p)**

c) Să se arate că $\dfrac{2\ln 2 - 1}{3} < \displaystyle\int_1^2 f(x)dx < \dfrac{2\ln 2 - 1}{2}$. **(5p)**

TESTUL 4

Marinela Ogiolan[4]

SUBIECTUL I (30p)

1. Să se calculeze $\left(\dfrac{1}{1-i} - \dfrac{1}{1+i}\right)^{2022}$. **(5p)**

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$. Să se rezolve ecuaţia $f(f(x)) = 0$. **(5p)**

3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $2^{2x+1} - 5 \cdot 2^{x+1} + 4 = 0$. **(5p)**

[4]Liceul Tehnologic Auto, Curtea de Argeş, mogiolan@yahoo.com

4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre $\overline{ab}$, să avem $a+b=5$. **(5p)**

5. Se consideră dreptele de ecuaţii d_1: $x-y=0$ şi d_2: $2x-2y-1=0$ Să se calculeze distanţa dintre cele două drepte. **(5p)**

6. Ştiind că $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ şi $\sin\alpha = \frac{1}{5}$, să se calculeze $\operatorname{ctg}\alpha$. **(5p)**

SUBIECTUL al II-lea (30p)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ şi mulţimea

$$C(A) = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) | \, XA = AX\}.$$

a) Să se arate că $B \in C(A)$. **(5p)**

b) Să se arate că, dacă $X \in C(A)$, atunci există $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$. **(5p)**

c) Să se arate că ecuaţia $X^2 = A$ nu are soluţii în $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. **(5p)**

2. Pe mulţimea $G = (-1, 1)$, se defineşte legea de compoziţie asociativă $x \circ y = \frac{x+y}{1+xy}$, $x, y \in G$ şi funcţia $f : G \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$.

a) Să se arate că $\frac{1}{3} \circ \frac{1}{3} = \frac{3}{5}$. **(5p)**

b) Să se determine elementul neutru al legii de compoziţie "$\circ$". **(5p)**

c) Să se arate că pentru oricare x, $y \in G$, $f(x \circ y) = f(x)f(y)$. **(5p)**

SUBIECTUL al III-lea (30p)

1. Se consideră funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2022} - 2022x + 1$.

a) Să se calculeze $f'(x)$. **(5p)**

b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei f. **(5p)**

c) Să se demonstreze că ecuaţia $f(x) = 0$, $x > 0$, are exact două soluţii $x_1 \in (0, 1)$, $x_2 \in (1, \infty)$. **(5p)**

2. Se consideră funcţia $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$.

a) Să se calculeze $\int_1^2 xf(x)dx$. **(5p)**

b) Să se calculeze $\int_2^3 f(x)dx$. **(5p)**

c) Să se demonstreze că $\int_1^x f(t)dt \leq \frac{x-1}{2}$, pentru oricare $x \in [1, \infty)$. **(5p)**

TESTUL 5

Antonio Nuică[5]

SUBIECTUL I (30p)

1. Să se calculeze $\sqrt[3]{1000} - \log_2 64 + \cos\frac{2\pi}{3}$. **(5p)**

2. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât maximul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 - x + m + 1$, să fie 1. **(5p)**

3. Să se rezolve ecuaţia $\log_x(x^2 - x + 2) = 2$. **(5p)**

4. Să se determine câte numere de 3 cifre au suma cifrelor egală cu 9. **(5p)**

5. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$. **(5p)**

6. Să se determine raza cercului înscris în triunghiul ΔABC, ştiind că $AB = 7$, $AC = 7$, $BC = 10$. **(5p)**

SUBIECTUL al II-lea (30p)

1. Fie sistemul $\begin{cases} x - ay - z = 8 \\ 2x - y - 2z = -4 \\ bx + 2y + z = 4 \end{cases}$, a, $b \in \mathbb{R}$ şi A matricea asociată sistemului.

a) Să se determine a şi b astfel încât sistemul este compatibil determinat. **(5p)**

b) Pentru $a = 1/2$, să se rezolve sistemul. **(5p)**

c) Pentru $b = -1$, să se rezolve sistemul. **(5p)**

2. Pe mulţimea $\mathbb{Z}$, se defineşte legea de compoziţie $x \circ y = axy + b(x + y) + c$, a,b, $c \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.

a) Să se determine în ce condiţii legea "$\circ$" este asociativă. **(5p)**

b) Să se determine în ce condiţii legea "$\circ$" are element neutru. **(5p)**

c) Pentru $a = 1$, $b = -1$ şi $c = 2$, să se arate că $(M, \circ)$ este grup (unde $M = \{x \in \mathbb{Z},\ x \geq 2\}$). **(5p)**

SUBIECTUL al III-lea (30p)

1. Fie $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln(x + 1)$.

a) Să se determine asimptotele la graficul funcţiei f. **(5p)**

b) Să se arate că f este convexă pe $(-1, \infty)$. **(5p)**

c) Să se arate că $e^x \geq x + 1$, pentru oricare $x \in \mathbb{R}$. **(5p)**

2. Se consideră $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)}$.

a) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 x(x+1)(x^4+1)f(x)dx$. **(5p)**

b) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 x(x^2+1)(x^4+1)f(x)dx$. **(5p)**

c) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 x(x+1)(x^2+1)f(x)dx$. **(5p)**

[5]Lect. univ. dr., Universitatea din Piteşti, antonio_74nm@yahoo.com

Teste pentru admiterea la facultate

Testul 1

Antonio Nuică[1]

SUBIECTUL I

Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 2}$.

a) Să se determine asimptotele la graficul funcției.
b) Să se studieze monotonia funcției.
c) Să se determine punctele de extrem ale funcției.

SUBIECTUL al II-lea

Fie $f = X^4 - 4X^3 + 6X^2 + \alpha X + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, cu rădăcinile $x_i \in \mathbb{C}$, $i = \overline{1,4}$.

a) Să se determine $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ pentru care f are rădăcina i.
b) Să se calculeze $\sum_{i=1}^{4} (x_i - 1)^2$.
c) Să se determine $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ pentru care rădăcinile lui f sunt reale.

SUBIECTUL al III-lea

a) Să se arate că $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$.
b) Să se deducă faptul că în orice triunghi ABC

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C.$$

c) Să se arate că $\operatorname{ctg}^2 A + \operatorname{ctg}^2 B + \operatorname{ctg}^2 C \geq 1$, în orice triunghi ABC.

Testul 2

Maria-Crina Diaconu[2]

SUBIECTUL I

1. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} C_x^4 x^4 2^{x-4} - C_x^3 x^3 2^{x-3} > 0 \\ C_x^4 x^4 2^{x-4} - C_x^5 x^5 2^{x-5} > 0 \end{cases}$$

2. Fie $A(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   a) Să se găsească valorile lui α pentru care $rang(A) < 4$.
   b) Pentru fiecare dintre valorile lui α găsită mai sus să se afle rangul matricei $A(\alpha)$.

[1]Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, antonio_74nm@yahoo.com
[2]Asist.univ.dr., Universitatea din Pitești, crynutza_25@yahoo.com

SUBIECTUL al II-lea

1. Fie $f:(0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{\frac{x}{1-x}}$. Să se determine punctele în care funcția este derivabilă și să se traseze graficul său.
2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2|x|$. Să se arate că funcția este integrabilă și să se calculeze aria subgraficului restricției lui f la $[-1,1]$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Să se rezolve ecuația:
$$\sin^2 x+4\sin x\cos x-2\cos^2 x=2$$
2. Să se afle măsurile unghiurilor unui triunghi MNP dacă avem îndeplinite condițiile: $M=\frac{2\pi}{3}+N$ și $\frac{R}{r}=8$.

Testul 3

D.M.I. [3]

Algebră și Elemente de analiză matematică

1. Să se determine mulțimile A și B, precum și numerele p și q, știind că:
$$A=\{x\in\mathbb{R}|\ x^2+x+p=0\},\ B=\{x\in\mathbb{R}|\ x^2+qx-4=0\},\ A\cup B=\{-2,-1,1,4\}.$$
2. Să se determine n și x dacă în dezvoltarea $\left(3^{\frac{x}{2}}+3^{\frac{1-x}{2}}\right)^n$ suma coeficienților binomiali ai primilor 3 termeni este egală cu 22, iar suma dintre termenul al treilea și termenul al cincilea este 420.
3. Fie $M=\left\{A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})|\ A=\begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix},\ a^2+b^2=1\right\}$.
   a) Arătați că M împreună cu înmulțirea matricelor formează un grup comutativ.
   b) Determinați elementele mulțimii $M\cap\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.
4. Fie $f:[2,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x+2-4\sqrt{x-2}}$. Să se studieze continuitatea și derivabilitatea funcției f.
5. Se dă integrala $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}dx$.
   a) Să se verifice condițiile de folosire a primei metode de schimbare de variabilă.
   b) Să se arate că $I=\ln 2$.

Geometrie plană și în spațiu, Geometrie analitică și Trigonometrie

1. Se dă pătratul $ABCD$ de latură a. Pe laturile (BC) și (CD) se iau punctele E, respectiv F astfel încât $BE=\frac{1}{3}a$ și $CF=\frac{2}{9}a$. Se cere:
   a) Să se arate că triunghiul AEF este dreptunghic și să se calculeze aria cercului circumscris acestui triunghi.

[3] Universitatea din Pitești, revista.matinf@upit.ro

b) Să se calculeze raportul ariilor triunghiurilor ADE și DEF.
c) Să se calculeze EH în funcție de k și a, unde $H \in (AF)$ și $k \in \mathbb{R}_+$, astfel încât $AH = k \cdot HF$.

2. Fie tetraedrul $VABC$ în care proiecția lui V pe planul (ABC) este centrul cercului circumscris triunghiului ABC.
   a) Să se arate că muchiile laterale ale tetraedrului $VABC$ sunt congruente.
   b) Să se calculeze aria laterală a tetraedrului $VABC$ dacă $VA = AB = AC = BC = a$.
   c) Dacă $AB = 3,\ AC = 4,\ BC = 5$ și $VA = 5$, să se calculeze volumul tetraedrului $VABC$.
3. Se consideră cercurile $(C_1):\ x^2 + y^2 = 16$ și $(C_2):\ x^2 + y^2 = 25$.
   a) Să se găsească punctele de pe cele două cercuri de abscisă $x = 2$.
   b) Să se scrie ecuația tangentei la cercul (C_1) în punctul de abscisă $x = 2$ și ordonată negativă și ecuația tangentei la cercul (C_2) în punctul de abscisă $x = 2$ și ordonată pozitivă.
   c) Să se găsească punctul de intersecție a celor două tangente de la punctul b).
4. Să se rezolve ecuația $\cos 2x + 2 \sin x - \dfrac{3}{2} = 0$.
5. Aflați $\operatorname{tg}(a + b)$, dacă $\sin a = \dfrac{1}{2}$, $\cos b = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos a > 0,\ \sin b < 0$.

(Admiterea la Universitatea din Pitești, specializările *Matematică* și *Matematică-Informatică*, 2000)

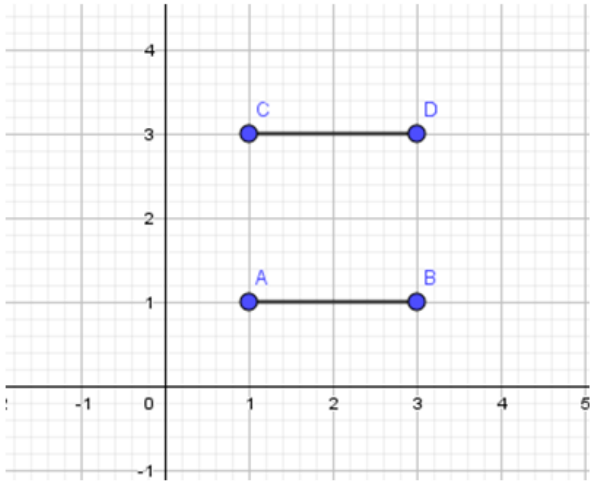
Teste grilă pentru admiterea la facultate

TESTUL 1

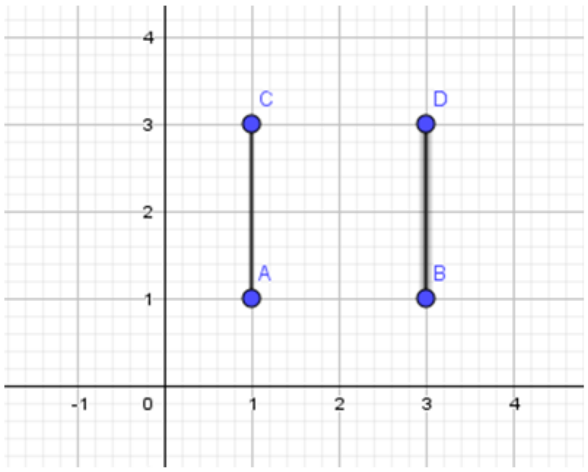
Mihaela Gabor[1]

1. Se dau mulțimile $A = [1, 3], B = \{1, 3\}$. Să se determine $B \times A$.

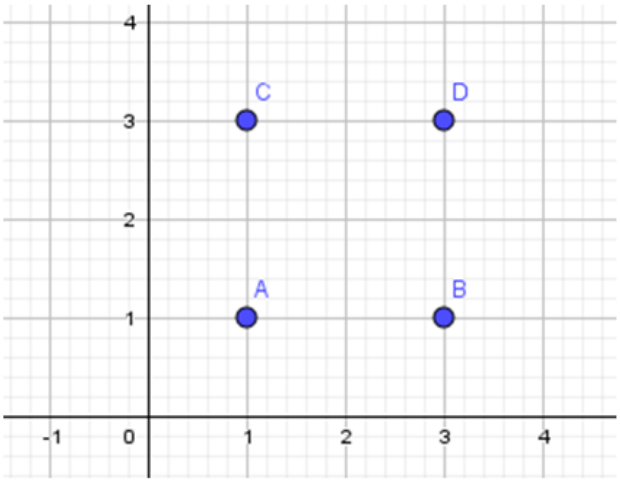
a)



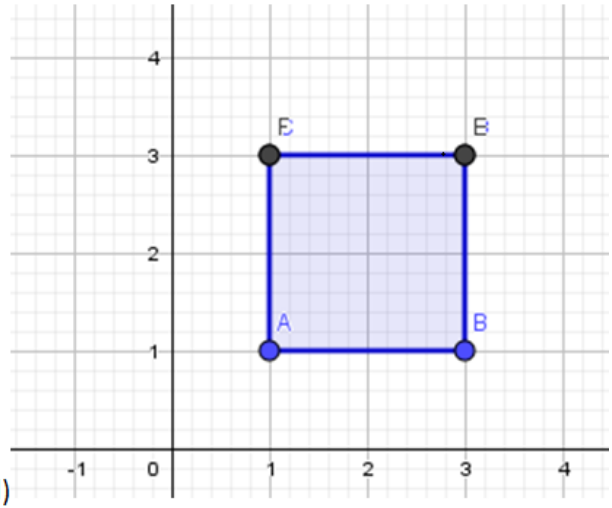
b)



c)



d)



2. Mulțimea maximă S a soluțiilor inecuației $\dfrac{|x-1|-2}{|x+1|} \leq 2$ este:

   a) $S = (-1, 1)$; b)$\mathbb{R} - \{-1\}$ c)$S = [1, \infty)$ d)$S = [0, 2]$

3. Numărul de soluții complexe ale ecuației $|z|^2 + z = 3 + 4i$ este:

   a) 0; b) 1; c) 2; d) 4.

[1]Profesor, Colegiul Național „C. Carabella”, Târgoviște, *mihaela_gab0r@yahoo.com*

4. În care dintre următoarele grupuri de clase de resturi, elementul $\widehat{3}$ are ordinul 3?

   a) $(\mathbb{Z}_3, +)$; b) $(\mathbb{Z}_6, +)$; c) $(U(\mathbb{Z}_{10}), \cdot)$; d) $(U(\mathbb{Z}_{13}), \cdot)$.

5. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{Z}$. Câte funcții verifică proprietatea că punctele de intersecție cu axele de coordonate sunt vârfurile unui triunghi echilateral?

   a) 0; b) 1; c) 2; d) 4.

6. Suma soluțiilor ecuației $C_{x+5}^{x^2-x+4} = 7$ este:

   a) 3; b) 0; c) 2; d) 5.

7. Fie progresia aritmetică a_n pentru care $a_1 + a_2 + a_3 = 21$. Dacă numerele $a_1 + 2, a_2 + 3, a_3 + 9$ sunt în progresie geometrică, calculați $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$.

   a) 148; b) 159; c) 168; d) 179.

8. Valoarea expresiei $(\log_a b + \log_b a + 2)(\log_a b - \log_{ab} b) \cdot \log_b a - 1$ este:

   a)$\log_a b$; b)$\log_b a$; c)0; d)1.

9. Punctul A(3,1) este vârful unui pătrat căruia îi cunoaștem ecuația unei diagonale: $y - x = 0$. Determinați aria pătratului.

   a) $8\sqrt{2}$; b) $4\sqrt{2}$; c) 8; d) 4;

10. Ecuația $\log_x(x + 1) = \log_{x+1} x$:

    a) are două soluții distincte; b) are o soluție în intervalul (1,2); c) are o soluție în intervalul (0,1); d) are o soluție întreagă.

11. Cât este valoarea numărului $(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4})^{2022}$?

    a) 1; b)-1; c) i; d) -i.

12. Fie $A(m) = \begin{pmatrix} m+2 & -2 & 3 \\ 0 & m & 3 \\ 0 & 0 & m+3 \end{pmatrix}$, m număr real. Dacă matricele $B \in \mathbb{M}_{3,2}(\mathbb{R}), C \in \mathbb{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ verifică relația $BC = A(0)$ calculați $tr(CB)$:

    a)6; b)5; c)0; d)4.

13. Asimptotele la graficul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x + (x^2 + 3x + 4)e^{nx}}{|x - 1| + |x + 1|e^{nx}}$ sunt:

    a) $y = -1$ asimptotă orizontală la $-\infty$ și $y = x + 2$ asimptotă oblică la $+\infty$; b) $x = -1, x = 1$ asimptote verticale; c) $y = 4x + 4$ asimptotă oblică; d) $y = 1$ asimptotă orizontală.

14. Fie ecuația $2x^3 - 4x^2 - 7x + \alpha$. Valoarea parametrului real α pentru care $\dfrac{x_1 + x_2}{x_3} + \dfrac{x_2 + x_3}{x_1} + \dfrac{x_3 + x_1}{x_2} = -1$ este:

    a) $\alpha = -1$; b) $\alpha = 5$; c) $\alpha = 2$; d) $\alpha = 7$.

15. Fie $S = \int_{\frac{1}{e}}^{\sqrt{3}} \frac{x+[x]}{x^2+[x]}dx - \frac{1}{2}\ln 2$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x. Atunci valoarea lui S este:

a) $S = 1$; b) $S = 3$; c) $S = 1 + \frac{\pi}{12}$; d)$S = 2 + \pi$.

TESTUL 2

Vasile Marius Macarie[2]

1. Partea reală a numărului complex $z = (\sqrt{3} + i)^{2022}$ este:

a) -2^{2022}; b) 0; c) -2^{2022}; d) $-2^{2022}\sqrt{3}$; e) -1;

2. Suma valorilor întregi ale lui a pentru care funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (-a^2 + a + 2)x + 4$ este strict crescătoare este:

a) 2; b) 3; c) -2; d) 1; e) 0.

3. Valorile reale ale lui a pentru care funcția $f : (1, \infty) \to (a, b)$, $f(x) = \frac{x-7}{x+2}$ este surjectivă sunt:

a) $a = 2,\ b = 3$; b) $a = -2,\ b = 1$; c) $a = 0,\ b = 3$; d) $a = -2,\ b = 3$; e) $a = 1,\ b = 2$.

4. Dacă a este un număr real cu proprietatea $2^a + 2^{-a} = 5$, atunci valoarea lui $\frac{4^a + 4^{-a}}{8^a + 8^{-a}}$ este:

a) $\frac{23}{110}$; b) $\frac{1}{5}$; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{15}{64}$; e) $\frac{21}{100}$.

5. Termenul care nu conține pe x din dezvoltarea $\left(x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^{12}$ este:

a) T_6; b) T_4; c) T_{10}; d) Nu există; e) T_9.

6. Dacă x_1, x_2 sunt soluțiile reale ale ecuației $\log_2^2 x^2 - \log_{\frac{1}{2}} x = 3$, cu $x_1 < x_2$, atunci valoarea lui $x_1^{-4} + x_2^4$ este:

a) 12; b) $\frac{129}{16}$; c) 8; d) 16; e) 24.

7. Valorile reale ale lui m, n pentru care sistemul de ecuații $\begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ 2x - y + mz = 4 \\ 3x + 2y - z = n \end{cases}$ este incompatibil sunt:

a) $m = 6; n = 10$; b) $m = 11; n = \frac{25}{3}$; c) $m = -1; n \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$; d) $m = -11; n \in \mathbb{R} \setminus \{8\}$; e) $m = 11; n \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{25}{3}\right\}$.

[2]Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, macariem@yahoo.com

8. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x \circ y = 3xy - 3\sqrt{2}(x+y) + 6 + \sqrt{2}$. Dacă S este suma soluțiilor ecuației $x \circ x \circ x = x$, atunci:

   a) $S = 0$; b) $S = \frac{2}{3}$; c) $S = 3\sqrt{2}$; d) $S = 2\sqrt{2}$; e) $S = 6\sqrt{2}$.

9. Se consideră polinomul$f \in \mathbb{C}[X]$, $f(x) = (x+i)^{2021} + (x-i)^{2021}$, care are forma algebrică $f = a_{2021}X^{2021} + a_{2020}X^{2020} + ... + a_1X + a_0$. Atunci suma $a_{2021} + a_{2020} + a_{2019}$ este egală cu:

   a) 2; b) $-2(1010 \cdot 2021 - 1)$; c) 2021; d) $2(1 + 1010 \cdot 2021)$; e) 0.

10. Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt{x^2+4x+1}}{x} \right)^{2x-3}$ este:

    a) 1; b) e^2; c) $+\infty$; d)e^4; e) 0.

11. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x \arctan x - \ln(1+x^2)$. Dacă m reprezintă numărul punctelor de extrem local ale lui f, iar n reprezintă numărul punctelor de inflexiune ale funcției f, atunci $m + n$ este:

    a) 2 ; b) 3; c) 0; d) 4; e) 1.

12. Fie $f : \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{3}{(x-1)(x+2)}$. Atunci $f^{(2021)}(2)$ este:

    a) $2020! \left(1 - \dfrac{1}{4^{2021}}\right)$; b) $2021! \left(\dfrac{1}{4^{2022}} - 1\right)$; c) $-2022! \left(1 + \dfrac{1}{4^{2022}}\right)$;

    d) $-2021! \left(1 - \dfrac{1}{2^{4040}}\right)$; e) $-2020! \left(\dfrac{1}{2^{4042}} - 1\right)$.

13. Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \ln(2-x), & x \leq 1 \\ ax^2 + (3a-2b)x + c, & x > 1 \end{cases}$ este de două ori derivabilă în $x = 2$ pentru:

    a) $(a, b, c) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$; b) $(a, b, c) = (0, 1, -1)$; c) $(a, b, c) = \left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, 1\right)$; d) $(a, b, c) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$; e) $(a, b, c) = \left(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.

14. Se consideră funcțiile $f_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f_n(x) = \dfrac{1}{|x-n|+5}$. Atunci valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^5 f_n(x)dx$ este:

    a) 1; b) ∞; c) 0; d) $\ln 5$; e) 5.

15. Valoarea integralei $\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{x^{2020}}{x^{2022}+1} \cdot \arctan x dx$ este:

    a) $\frac{\pi}{4}$; b) 2; c) 0; d) $\frac{\pi}{2}$; e) 1.

TESTUL 3

Raluca Mihaela Georgescu[3]

1. Suma cuburilor soluțiilor ecuației $3^{2\log_3 x} - \log_{\sqrt{5}}(5\sqrt{5})^x + \sqrt[4]{16} = 0$ este:

a) 2; b) 9; c) 3; d) 5; e) 0

2. Valorile reale ale lui x pentru care este definit logaritmul $\log_{\frac{3x}{x^2-4}}(\log_3(10-x))$ sunt:

a) $(-2,-1)\cup(2,4)\cup(4,9)$; b)$(-2,0)\cup(2,4)\cup(4,9)$; c) $(-2,-1)\cup(-1,0)\cup(2,4)\cup(4,9)$; d) $(-2,-1)\cup(-1,0)\cup(2,9)$; e) $(-2,0)\cup(2,9)$;

3. Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+4x^2+x-6}{x^3-x^2+5x-5}$ este:

a) $\dfrac{5}{2}$; b) $-\dfrac{5}{2}$; c) 2; d) $\dfrac{11}{6}$; e) 0.

4. Rădăcinile complexe ale ecuației $2^{x^3-x^2+4x} = 16$ sunt:

a) $\{-2i, 1, 2i\}$; b) $\{-2i, 2i\}$; c) $\{1-2i, 1+2i\}$; d) $\{-2i, 2, 2i\}$; e) $\{-2i, 4, 2i\}$.

5. Numărul asimptotelor funcției $f:\mathbb{R}\setminus\{1,2\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2-3x+2}$.

a) 1; b) 2; c) 3; d) 4; e) 0.

6. Dacă într-o progresie geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$, cu termeni pozitivi avem $b_1\cdot b_2\cdot b_3 = 64$ și $b_1 - b_3 + b_5 = 12$, atunci S_{10} este:

a) $\dfrac{124}{\sqrt{2}+1}$; b) $\dfrac{124}{1-\sqrt{2}}$; c) $124(\sqrt{2}+1)$; d) $124(\sqrt{2}-2)$; e) $124(\sqrt{2}+1)$.

7. Dacă $z_1,\ z_2$ sunt rădăcinile ecuației $1 - z + z^2 = 0$, atunci $z_1^5 + z_2^5 =$

a) -3; b) 1; c) 3; d) 2; e) -1.

8. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x + 24$. Atunci $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{x^3+7x^2+16x+12}$, unde a este punctul de minim, este:

a) 18; b) 16; c) 0; d) -12; e) 12.

9. Fie matricea $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A=\begin{pmatrix}\sqrt[4]{16} & 1\\ 0 & \sqrt[3]{8}\end{pmatrix}$. Atunci A^n este:

a)$\begin{pmatrix}2^{n-1} & 1\\ 0 & 2^{n-1}\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}2^n & 1\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix}2^n & n2^n\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}2^n & n2^{n-1}\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix}2^n & (n-1)2^n\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}$.

10. Mulțimea soluțiilor ecuației $x^2 + \hat{3}x + \hat{2} = \hat{6}$ peste corpul $\mathbb{Z}_8$ este:

a) $\{\hat{4}\}$; b) $\{\hat{7}\}$; c) $\{\hat{1},\hat{4}\}$; d) $\{\hat{1},\hat{7}\}$; e) $\{\hat{1},\hat{4},\hat{7}\}$

[3]Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, gemiral@yahoo.com

11. Valoarea integralei $\int\limits_1^{e^2} \frac{|x-e|\ln x}{x}dx$ este:

a) e^2-3e+1; b) e^2+3e+1; c) e^2+e+1; d) e^2-3e-1; e) e^2-2e-1.

12. Valorile parametrului real m pentru care ecuația $2x^3-9x^2+12x-m=0$ are trei rădăcini reale distincte sunt:

a) $m\in(4,5]$; b) $m\in(4,5)$; c) $m\in[4,5]$; d) $m\in[4,5)$; e) $\emptyset$.

13. Valorile parametrului real m pentru care parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx^2+(m+1)x-2$ se află sub axa OX sunt:

a) $m\in(-5-4\sqrt{6},-5+4\sqrt{6})$; b) $m\in[-5-2\sqrt{6},-5+2\sqrt{6}]$; c) $m\in(-\infty,-5+2\sqrt{6})$; d)$m\in(-5-2\sqrt{6},\infty)$; e)$m\in(-5-2\sqrt{6},-5+2\sqrt{6})$.

14. Suma pătratelor rădăcinilor ecuației $\begin{vmatrix} x & 2 & -1 \\ -1 & x & 2 \\ 2 & -1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x-2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ este:

a) 22; b) 23; c) 12; d) 10; e) 11.

15. Valoarea integralei $\int\limits_0^2 \frac{\log_2 2^{x^3+2x^2}}{x+2}e^x dx$ este:

a) e^2+2; b) $2e^2+2$; c) $2e^2-2$; d) $4e^2+2$; e) $4e^2+1$.

TESTUL 4

D.M.I. [4]

1. Fie funcția $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{\frac{x^2-4x+8}{x^2+4}}$. Domeniul maxim de definiție este $D=$

a)$[4,\infty)$; b) $[1,\infty)$; c)$(-\infty,0)$; d) $\mathbb{R}$; e) $(-\infty,0]\cup[2,\infty)$;

2. Soluția inecuației $\sqrt{x-2}\geq x-4$ este:

a) $x\in[3,6]$; b) $x\in[-2,6]$; c) $x\in[4,6]$; d) $x\in[2,4]$; e) $x\in[2,6]$;

3. Numărul termenilor raționali din dezvoltarea $(\sqrt{2}+\sqrt[4]{3})^{100}$ este:

a) 50; b) 24; c) 25; d) 15; e) 26;

4. Fie $L=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n^2}\right)^{n^2}$, $a\in\mathbb{R}$. Valoarea lui a pentru care $L=\sqrt{e}$ este:

a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; c) 2; d) $\sqrt{2}$; e) 1;

5. Dacă $a_1,\ a_2,...,a_n,\ a_{n+1}$ sunt în progresie aritmetică, atunci

$$a_1-C_n^1a_2+C_n^2a_3-...+(-1)^nC_n^na_{n+1}=$$

a) $S=2^n$; b) $S=0$; c) $S=a_{n+1}-a_1$; d) $S=a_{n+1}+a_1$; e) $S=2^n-1$;

[4]Universitatea din Pitești, revista.matinf@upit.ro

6. Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to\infty} x\left[e-\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^x\right]$ este:

a) 0; b) $\dfrac{3}{2}$; c) $\dfrac{3e}{2}$; d) $\dfrac{e}{2}-1$; e) ∞;

7. Sistemul $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+mz &=& 1\\ x-2y+z &=& m\\ mx+y+z &=& 0\end{array}\right.$ este compatibil dacă valorile parametrului $m\in\mathbb{R}$ sunt:

a) $m\in(1,+\infty)$; b) $m\in\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$; c) $m\in\mathbb{R}$; d) $m\in[-2,1]$; e) $m\in(-\infty,-2)$;

8. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale se definește legea de compoziție

$$x\star y=\frac{1}{2}(x+y-xy+1),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Dacă e este elementul neutru, atunci $e^2+2e+3=$

a) 0; b) 3; c) -1; d) 2; e) 6;

9. Dacă $I(a)=\int\limits_a^0 e^x(2x^2-3x)dx$, atunci $\lim\limits_{a\to-\infty} I(a)=$

a) 0; b) 7; c) 1; d) $+\infty$; e) $-\infty$;

10. Se consideră ecuația matriceală

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7\\ -2 & 5 & 16\end{pmatrix}.$$

Atunci suma elementelor matricei X este:

a) 5; b) 4; c) 8; d) 3; e) 2;

11. Funcția $f:[1,m]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+m$, $(m>1)$, verifică ipotezele teoremei lui Rolle pe intervalul $[1,m]$, dacă și numai dacă:

a) $m\in(1,2)$; b) $m=2$; c) $m\in(1,\infty)$; d) $m\in(1,2]$; e) $m\in[2,\infty)$;

12. Suma pătratelor soluțiilor ecuației $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=4$ este:

a) 0; b) 10; c) 8; d) 4; e) 2;

13. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int\limits_0^{x^2} e^{u^2}du$. Atunci $f'(1)=$

a) $\dfrac{e}{2}$; b) 0; c) e^2; d) e; e) $2e$;

14. Valoarea expresiei $E(x)=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ pentru $1\le x\le 2$ este:

a) 2; b) 0; c) 1; d) 3; e) 4;

15. $\int\limits_{-2}^{2}\min\{x^2-1,x+1\}dx=$

a) $\dfrac{1}{2}$; b) 1; c) -1; d) 2; e) $-\dfrac{1}{2}$.

PROBLEME DE INFORMATICĂ PENTRU EXAMENE

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Matematică-Informatică

Testul 1

Nicoleta Voica [1], *Adrian Voica* [2]

Limbajul C/C++

Filieră teoretică, profil real, specializare matematică-informatică / matematică-informatică intensiv informatică, Filieră vocațională, profil militar, specializare matematică-informatică

◦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
◦ Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.
◦ Identificatorii utilizați în rezolvări trebuie să respecte precizările din enunț (bold), iar în lipsa unor precizări explicite, notațiile trebuie să corespundă cu semnificațiile asociate acestora (eventual în formă prescurtată). Datele de intrare se consideră corecte, validarea lor nefiind necesară.
◦ În grafurile din cerințe oricare arc/muchie are extremități distincte și oricare două arce/muchii diferă prin cel puțin una dintre extremități.

SUBIECTUL I (20 de puncte)

Pentru fiecare dintre itemii de la 1 la 5, scrieţi pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Care este valoarea următoarei expresii C/C++? `(200/5/2+3-75)/2+25/3*2` **(4p.)**
   a) -10 b) -9.333333 c) -22 d) -21.844444
2. Utilizând metoda backtracking pentru a genera submulțimile mulțimii $\{1, 9, 7, 2, 6\}$ un elev dorește să știe câte submulțimi care obligatoriu conțin elementul 9 și nu conțin elementul 1 se pot genera. **(4p.)**
   a) 7 b) 16 c) 6 d) 8
3. Fie următorul subprogram recursiv:

```
void bac (int n)
        { cout<<2*n<<'*';
             for(int i=n/2; i>0; i--) bac(i);
             cout<<n<< '#';
        }
```

   Ce va afişa subprogramul în urma apelului bac(6)? **(4p.)**

[1]Profesor, Colegiul Național ,,Ion C. Brătianu", Pitești, nvoica71@yahoo.fr
[2]Profesor, Liceul Teoretic „Ion Barbu", Pitești, avoica71@yahoo.com

a) `12*1#6*3#2*1#4*2#2*1#2*6#`
b) `1262134212216***##**##*##`
c) `12*6*2*1#3#4*2*1#2#2*1#6#`
d) `12*6*2*4*2*2*1#3#1#2#1#6#`

4. Se consideră un graf neorientat conex cu n muchii. Care este numărul maxim de noduri pe care le poate avea graful? **(4p.)**

a) $n/2$ b) $n-1$ c) $n+1$ d) $2n$

5. Ştiind că X este un tablou bidimensional cu n linii şi m coloane (numerotate de la 1 la n, respectiv de la 1 la m) şi elemente de tip întreg, să se precizeze care vor fi valorile afișate în urma executării următoarei secvențe de instrucțiuni C/C++, dacă $n = 4$, $m = 5$ și $X = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -1 & 6 & -4 \\ 1 & -4 & 5 & -2 & 8 \\ 4 & -6 & 1 & -3 & -7 \\ 9 & 4 & -2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$? **(4p.)**

```
for (i=n; i>=1; i--)
   for (j=m; j>=1; j--)
        if (i == n || i == 1) s1 = s1 + X[i][j];
        else if (j == 1 || j == m) s2 = s2 + X[i][j];
cout<<s1<<'  '<<s2;
```

a) `30 26` b) `30 6` c) `15 26` d) `15 6`

SUBIECTUL al II-lea (40 de puncte)

Scrieţi pe foaia de examen răspunsul pentru fiecare din cerinţele următoare.

1. Se consideră algoritmul următor, scris în pseudocod.

```
citeste a, b (numere intregi)
 |daca a < 0 atunci
 |       a ← - a
 |       b ← - b
 |_■
  c ← 0
 |cat timp a > 0 executa
 |       c ← c + b
 |       a ← a - 1
 |_■
scrie c
```

a) Scrieţi ce valori vor fi afişate, dacă se citesc pe rând valorile 6 și 2. **(6p.)**
b) Precizaţi toate perechile de numere ce pot fi citite pentru a și b, astfel încât valoarea afișată să fie 10. **(6p.)**
c) Scrieţi în pseudocod un algoritm echivalent cu cel dat care să nu utilizeze structuri repetitive. **(6p.)**
d) Scrieţi programul C/C++ corespunzător algoritmului dat. **(10p.)**

2. Fie declararea de mai jos.

```
struct ora
        { int h, m, s; } x, y;
```

Să se scrie o secvență de program C/C++ care citește valorile variabilelor x și y și afișează care dintre ele reprezintă o oră mai târzie. **(6p.)**

3. Fie un arbore dat prin următorul vectori de tați $(7, 1, 7, 1, 3, 1, 0, 6, 5)$. Precizați nodurile cu cei mai mulți ascendenți, precum și lungimea maximă a unui lanț elementar în arbore. **(6p.)**

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Scrieţi pe foaia de examen răspunsul pentru fiecare din cerinţele următoare.

1. Scrieţi un program în C/C++ care citeşte un text de maxim 50 de caractere litere mici ale alfabetului englez şi determină şi afişează pe ecran șirul obținut în urma inserării în

șir între oricare două vocale de pe poziții consecutive a caracterului "*", iar între oricare două consoane de pe poziții consecutive a caracterului "#". Dacă în șir nu există vocale și consoane pe poziții consecutive se va afișa un mesajul "nu exista".

Exemplu: pentru șirul `calculatoare` se va afişa: `cal#culato*are`, iar pentru șirul `monitor` se va afișa `nu exista` **(10p.)**

2. Scrieţi definiţia completă a subprogramului `bac` cu trei parametri, care primeşte prin intermediul primului parametru x un tablou unidimensional cu maxim 100 de numere întregi de maxim 5 cifre fiecare și prin intermediul parametrilor $p1$ și $p2$, $p1 < p2$, două poziții din tabloul x. Subprogramul returnează prin intermediul parametrului x tabloul obținut în urma interschimbării primei valori pozitive cu ultima valoare negativă din secvența de elemente dintre pozițiile $p1$ și $p2$, iar prin parametrii $p1$ și $p2$ returnează pozițiile celor două elemente, dacă secvența nu conține valori pozitive sau negative aceasta rămâne nemodificată, iar $p1$ și $p2$ returnează valoarea -1.

   Exemplu: dacă $n = 6$ și $x = (-7, -10, 13, 6, -8, 2)$, $p1 = 2$ și $p2 = 5$ în urma execuției subprogramului se va obține vectorul $(-7, -10, -8, 6, 13, 2)$, iar $p1 = 3$ și $p2 =5$. **(10p.)**

3. a) Folosind un algoritm eficient din punct de vedere al timpului de executare, scrieţi un program C/C++ care citeşte două numere naturale a și b de maxim 9 cifre fiecare și un număr natural c, $(c < 10)$ și determină toate numerele din intervalul închis determinat de a și b a căror cifră caracteristică este egală cu c (cifra caracteristică a unui număr natural este egală cu suma cifrelor numărului, iar dacă suma cifrelor are mai mult de 1 cifră se calculează suma cifrelor sumei și așa mai departe până când se obține un număr de o cifră; exemplu: cifra caracteristică a numărului 919 este 1 deoarece $9 + 1 + 9 = 19$, $1 + 9 = 10$, $1 + 0 = 1$).

      Numerele se vor afişa în fişierul text `bac.out` separate printr-un spațiu, dacă nu există nici un număr în interval cu proprietatea cerută se va afișa mesajul `Nu exista`. **(6p.)**

   b) Descrieţi în limbaj natural metoda utilizată justificând eficienţa acesteia. **(4p.)**

      Exemplu: dacă se citesc valorile `83, 107, 5`, se vor afișa în fișier numerele `86 95 104`.

Testul 2

Nicoleta Enache [3]

Limbajul C/C++

Filieră teoretică, profil real, specializare matematică-informatică / matematică-informatică intensiv informatică, Filieră vocațională, profil militar, specializare matematică-informatică

∘ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
∘ Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.
∘ Identificatorii utilizați în rezolvări trebuie să respecte precizările din enunț (bold), iar în lipsa unor precizări explicite, notațiile trebuie să corespundă cu semnificațiile asociate acestora (eventual în formă prescurtată). Datele de intrare se consideră corecte, validarea lor nefiind necesară.
∘ În grafurile din cerințe oricare arc/muchie are extremități distincte și oricare două arce/muchii diferă prin cel puțin una dintre extremități.

SUBIECTUL I (20 de puncte)

Pentru fiecare dintre itemii de la 1 la 5, scrieţi pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Fie x un număr întreg. Alegeți varianta corectă care are valoarea de adevăr 1 dacă și numai dacă $x \in (-2, 8)$. **(4p.)**
   a) `!(x<=-2 || x>=8)`
   b) `!(x<-2 || x>8)`
   c) `x<-2 || x>8`
   d) `x>-2 || x<8`

2. Considerând declarările alăturate, care dintre următoarele referiri este corectă din punct de vedere sintactic. **(4p.)**

```
struct dataex{int zi,luna,an;}
struct produs
    {char denumire[50];
     dataex d;
    }
    p;
```

   a) `p->denumire;`
   b) `p.d.an;`
   c) `p.dataex.zi;`
   d) `p.an`

3. Subprogramul `f` este definit alăturat. Indicați ce se afișează în urma apelului de mai jos. **(4p.)**

```
int f(int a, int b){
if (b==0)
return 1;
else{
if (b%2==1)
return a*f(a*a%10,b/2)%10;
        else
return f(a*a%10,b/2)%10;
        }
}
```

```
f(3,7);
```

   a) `3`
   b) `7`
   c) `9`
   d) `1`

4. Având la dispoziție cinci nume de copaci, (stejar, fag, arțar, ulm, tei), se utilizează metoda backtracking pentru a forma grupe de câte trei copaci, știind că în cadrul unei grupe nu contează ordinea de așezare a copacilor. Primele trei soluții obținute sunt, în această ordine: (stejar, fag, arțar), (stejar, fag, ulm), (stejar, fag, tei). Penultima soluție generată, în ordinea obținerii lor este: **(4p.)**

[3]Profesor, Colegiul Național "Ion C. Brătianu", Pitești, enache_nicoleta@yahoo.com

a) (arțar, fag, stejar)
b) (fag, ulm, tei)
c) (arțar, ulm, tei)
d) (tei, ulm, arțar)

5. Se dă un graf neorientat G cu 5 noduri și muchiile: [1, 2], [2, 5], [2, 3], [2, 4], [3, 5], [4, 5]. Precizați care este lungimea celui mai lung lanț elementar dintre nodurile 1 și 4: **(4p.)**

a) 3 b) 5 c) 4 d) 2

SUBIECTUL al II-lea (40 de puncte)

Scrieţi pe foaia de examen răspunsul pentru fiecare din cerinţele următoare.

1. Algoritmul următor este reprezentat în pseudocod. S-a notat cu `[c]` partea întreagă a numărului real `c`.

```
citeste n (numar natural)
s←0
| pentru i=1,n executa
|    citeste x
|    c←x%10
|     |  cat timp x>9 executa
|     |_    x←[x/10]

|     |  daca c=x atunci
|     |_    s←s+x
|_scrie s
```

a) Scrieți ce se afișează dacă se citesc în ordine valorile: 5, 424, 3307, 12311, 5845, 6368. **(6p.)**
b) Pentru n=4 găsiți patru numere distincte cu exact patru cifre astfel încât să se afișeze valoarea 10. **(6p.)**
c) Scrieţi programul C/C++ corespunzător algoritmului dat. **(10p.)**
d) Scrieți în pseudocod un algoritm, echivalent cu cel dat, înlocuind structura repetitivă pentru ... execută cu o altă structură repetitivă. **(6p.)**

2. Variabila `clasa` memorează datele a 30 de elevi dintr-o clasă, pentru fiecare elev al clasei memorăm numele (un șir de cel mult 50 caractere), două note (numere naturale `n1` și `n2`) și media (un număr real). Scrieți definiția unei structuri cu eticheta `elev`, care permite memorarea datelor despre un elev, și declarați corespunzător variabila `clasa`. **(6p.)**
3. Ce afișează secvența? **(6p.)**

```
char s[100]="copilarie";
cout<<strlen(s)<<'\n';
for(int i=0;i<strlen(s);i++)
    if(strchr("aeiou",s[i]))s[i]=s[i]-32;
cout<<s;
```

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Scrieţi pe foaia de examen răspunsul pentru fiecare din cerinţele următoare.

1. Subprogramul `calcul` are ca parametri trei numere naturale:
   - `a` și `b` prin care primește două numere naturale;

- `s` care întoarce suma cifrelor comune distincte din cele două numere.

Să se scrie definiția completă a subprogramului. **(10p.)**

Exemplu: Pentru `a=232445` și `b=6238855`, `s` va fi `10 (2+3+5)`

2. Scrieți un program C/C++ care citește de la tastatură un număr natural x de exact 3 cifre și un număr natural, n ($n \in [3, 20]$) și construiește în memorie un tablou bidimensional cu n linii și n coloane, astfel încât are proprietățile:

   - elementele de pe prima coloană au cifra sutelor lui x;
   - elementele de pe a doua coloană au cifra zecilor a lui x;
   - elementele de pe a treia coloană au cifra unităților lui x;
   - dacă tabloul are mai mult de 3 coloane se reia completarea elementelelor conform celor descrise mai sus.

   Programul afișează pe ecran tabloul construit, fiecare linie a tabloului pe câte o linie a ecranului, cu elementele aflate pe aceeași linie separate prin câte un spațiu. **(10p.)**

   Exemplu: $x = 123$ și $n = 5$ se va construi tabloul
   $$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{matrix}$$

3. Din fișierul `bac.txt` se citește de pe prima linie un număr natural n ($1 \leq n \leq 10^6$), iar apoi se citesc n numere naturale aparținând intervalului $[0, 10^9]$. Se cere să se determine care este cea mai lungă secvență de numere care începe și se termină cu un număr prim și să se afișeze lungimea acesteie, precum și elementul de început și elementul de final al secvenței, precum și indicii pozițiilor de început și sfârșit pentru secvență. Dacă nu este niciun număr prim să se afișeze mesajul "Nu sunt numere prime!". Proiectați un algoritm eficient din punctul de vedere al memoriei utilizate și al timpului de executare.
   a) Descrieţi în limbaj natural un algoritm eficient de rezolvare a problemei. **(2p.)**
   b) Scrieţi programul C/C++ corespunzător. **(8p.)**

   Exemplu: dacă în fişierul `bac.txt` avem:

   ```
   11
   8 14 17 5 8 9 10 7 22 19 20
   ```

   Se va afișa

   ```
   8
   17 19
   3 10
   ```

Testul 3

Anca-Elena Ilie [4]

Limbajul C/C++

Filieră teoretică, profil real, specializare matematică-informatică / matematică-informatică intensiv informatică, Filieră vocațională, profil militar, specializare matematică-informatică

∘ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
∘ Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.
∘ Identificatorii utilizați în rezolvări trebuie să respecte precizările din enunț (bold), iar în lipsa unor precizări explicite, notațiile trebuie să corespundă cu semnificațiile asociate acestora (eventual în formă prescurtată). Datele de intrare se consideră corecte, validarea lor nefiind necesară.
∘ În grafurile din cerințe oricare arc/muchie are extremități distincte și oricare două arce/muchii diferă prin cel puțin una dintre extremități.

SUBIECTUL I (20 de puncte)

Pentru fiecare dintre itemii de la 1 la 5, scrieţi pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. În ce interval poate lua valori variabila întreagă `x` pentru ca expresia `!(x+2021<0 || x-2021>=0)` să fie adevărată? **(4p.)**
   a) `[-2021, 2021]`
   b) `(-2021, 2021]`
   c) `[-2021,2021)`
   d) `(-2021,2021)`

2. Utilizând metoda backtracking se generează toate posibilitățile de a forma selecții de câte patru jocuri de masă din mulțimea ,,Remi", ,,Catan", ,,Uno", ,,Saboteur", ,,Alias", astfel încât pe oricare două poziții alăturate să nu se afle două jocuri din submulțimea ,,Remi", ,,Uno", ,,Alias". Oricare două selecții diferă prin ordinea jocurilor. Primele cinci selecții generate sunt în această ordine: ,,Remi", ,,Catan", ,,Uno", ,,Saboteur", ,,Remi", ,,Catan", ,,Saboteur", ,,Uno", ,,Remi", ,,Catan", ,,Saboteur", ,,Alias", ,,Remi", ,,Catan", ,,Alias", ,,Saboteur". Ultima selecție este: **(4p.)**
   a) ,,Alias", ,,Saboteur", ,,Uno", ,,Catan"
   b) ,,Alias", ,,Saboteur", ,,Uno", ,,Remi"
   c) ,,Alias", ,,Saboteur", ,,Catan", ,,Remi"
   d) ,,Alias", ,,Uno", ,,Catan", ,,Remi"

3. Subprogramul `f` este definit alăturat. Indicați ce se afișează în urma apelului de mai jos. **(4p.)**

```
f(4);
```

```
void f (int x)
{
if(x<8)
     {cout<<x;
     f(x+1);
     cout<<x+1;}
}
```

   a) `4 5 6 7 8 5 6 7`
   b) `4 5 6 7 7 6 5 8`
   c) `4 5 6 7 8 7 6 5`
   d) `5 6 7 8 9 6 5 7`

[4]Student, Universitatea din Pitești, domeniul de licență Informatică, anca.ilie29@gmail.com

4. Un arbore cu 11 noduri numerotate de la 1 la 10 este reprezentat prin vectorul de "tați" (7, 5, 7, 8, 3, 10, 11, 1, 3, 7). Indicați numărul de frunze ale arborelui: **(4p.)**

   a) 4 c) 6
   b) 5 d) 3

5. Un graf neorientat are 6 noduri, numerotate de la 1 la 6 și muchiile [1, 2], [1, 3], [1, 4], [2, 3], [3, 4], [4, 5],[3, 6]. Care este ordinea nodurilor vizitate dacă se pleacă din nodul 1 și se parcuge în lățime graful dat? **(4p.)**

   a) 1, 2, 3, 4, 6, 5 c) 1, 2, 3, 6, 5, 4
   b) 1, 3, 2, 4, 5, 6 d) 1, 3, 2, 4, 5, 6

SUBIECTUL al II-lea (40 de puncte)

Scrieţi pe foaia de examen răspunsul pentru fiecare din cerinţele următoare.

1. 1. Algoritmul alăturat este reprezentat în pseudocod. S-a notat cu `a%b` restul împărțirii numărului natural `a` la numărul natural nenul `b` și cu `[c]` partea întreagă a numărului real `c`.

```
citeste n,k (numere naturale)
cat timp n>0 executa
|  c<-n%10
| | daca k%2=1 atunci
| | |    daca c%2=0 atunci
| | |_       p<-p+p*(c+1)
| |___
|     n<-[n/10]
|_____k <- k-1
scrie p
```

   a) Scrieți ce afișează dacă se citesc, în această ordine, valorile 347852 și 7. **(6p.)**
   b) Scrieți două perechi numere, primul număr din intervalul (100, 1000), care pot fi citite, astfel încât, în urma executării algoritmului, pentru fiecare dintre acestea, să afișeze valoarea 1. **(6p.)**
   c) Scrieţi programul C/C++ corespunzător algoritmului dat. **(10p.)**
   d) Scrieți în pseudocod un algoritm echivalent cu cel dat, înlocuind adecvat structura `cat timp ... executa` cu o structură repetitivă de alt tip. **(6p.)**

2. Variabila `d` memorează date despre un film: numele, data apariției. Știind că expresiile C/C++ de mai jos au ca valori un șir de caractere reprezentând numele filmului, respectiv trei numere natural, reprezentând data (ziua, luna, anul) apariției, scrieți definiția unei structuri cu eticheta film care permite memorarea datelor precizate pentru un film și declarați corespunzător variabila `d`. **(6p.)**

```
d.nume d.data.zi d.data.luna d.data.an
```

3. Variabila `s` memorează un șir de cel mult 30 de caractere (litere mari și mici ale alfabetului englez). Declarați eventuale alte variabile necesare și scrieți o secvență de instrucțiuni în urma executării căreia să se modifice șirul astfel încat, literele mari să fie transformate în litere mici, respectiv cele mici să fie transformate în litere mari. **(6p.)**

   Exemplu: dacă se citeste textul `biBlIOtecA` se afișează pe ecran `BIbLioTECa`.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Scrieţi pe foaia de examen răspunsul pentru fiecare din cerinţele următoare.

1. Subprogramul `modificare` primește ca parametrii un număr natural $n \in [1, 15]$ și un tablou unidimensional v cu n elemente din intervalul $[-100, 100]$. Subprogramul transformă în memorie tabloul unidimensional, adăugând după fiecare număr par jumătatea sa și

după fiecare număr impar adaugă valoarea 1. Tabloul modificat este transmis tot prin parametru v. **(10p.)**

2. Scrieți un program C/C++ care citește de la tastatură un număr natural $n \in [3, 10]$ și construiește în memorie un tablou bidimensional cu n linii și n coloane numerotate de la 1 astfel încât fiecare linie a sa are proprietățile:

   - elementele situate pe diagolana principală au valoarea n;
   - începând de la diagonala principală spre dreapta, valoarea elementului scade cu câte o unitate, valoarea pară a lui n se memorează, iar în locul celei impare se va memora suma coordonatelor în tablou. Începând de la diagonala secundară spre stânga, valoarea elementului scade cu câte o unitate, valoarea pară a lui n se memorează, iar în locul celei impare se va memora suma coordonatelor în tablou.

   Programul afișează pe ecran tabloul construit, fiecare linie a tabloului pe câte o linie a ecranului, cu elementele aflate pe aceeași linie separate prin câte un spatiu. **(10p.)**

   Exemplu: Dacă $n = 5$ se afișează pe ecran tabloul

5	4	4	2	6
4	5	4	6	2
4	4	5	4	8
2	6	4	5	4
6	2	8	4	5

3. Fișierele `bac1.txt` și `bac2.txt` conțin numere naturale din intervalul $[0, 10^5]$: fișierul `bac1.txt` conține pe prima linie un număr `n1`, iar pe a doua linie un șir de `n1` numere, iar fișierul `bac2.txt` conține pe prima linie un număr `n2`, iar pe a doua linie un șir de `n2` numere. Numerele aflate pe aceeași linie a unui fișier sunt ordonate crescător și sunt separate prin câte un spațiu. Se cere să se afișeze pe ecran suma numerelor prime. Se știe că un număr poate să apară de mai multe ori într-unul sau în ambele fișiere, acesta va fi adăugat la sumă o singură data. Dacă nu există niciun număr prim, se va afișa pe ecran mesajul `nu exista`. Proiectați un algoritm eficient din punct de vedere al memoriei utilizate și al timpului de executare.

   Exemplu:

   Dacă fișierul `bac1.txt` conține numerele

   5

   1 9 10 11 14

   iar fisierul `bac2.txt` conține numerele

   8

   2 5 9 9 17 23 101 138

   Pe ecran se afișează 159.

   a) Descrieți în limbaj natural algoritmul proiectat, justificând eficiența acestuia. **(2p.)**
   b) Scrieți programul C/C++ corespunzator algoritmului proiectat. **(8p.)**

PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU CONCURSURI

Rezolvarea problemelor pentru liceu din MATINF nr. 5

Clasa a IX-a

M 121. *Demonstrați că oricum s-ar considera patru puncte în interiorul sau pe conturul poligonului $OABCDE$, unde $O(0,0)$, $A(4,0)$, $B(4,2)$, $C(2,2)$, $D(2,4)$ și $E(0,4)$, se pot alege două, notate $M_1(x_1,y_1)$ și $M_2(x_2,y_2)$, astfel încât* $|x_1-x_2|+|y_1-y_2|\leq 4$.

Cristinel Mortici, Viforâta

Soluție. Suprafața poligonală dată este formată din trei pătrate de latură 2, deci printre cele patru puncte date există două, fie ele $M_1(x_1,y_1)$ și $M_2(x_2,y_2)$, situate în interiorul sau pe conturul unui aceluiași pătrat. Considerând punctul $K(x_2,y_1)$, avem

$$|x_1-x_2|+|y_1-y_2| = M_1K+M_2K \leq 2+2=4.$$

Notă. Domnul *Titu Zvonaru* din Comănești a propus o rezolvare asemănătoare, folosind

$$|x_1-x_2|+|y_1-y_2| \leq \sqrt{2}\cdot M_1M_2 \leq 4.$$

M 122. *Fie a,b,c,x,y,z numere reale strict pozitive. Arătați că*

$$\frac{1}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}}+\frac{1}{\frac{y}{a}+\frac{z}{b}+\frac{x}{c}}+\frac{1}{\frac{z}{a}+\frac{x}{b}+\frac{y}{c}}\leq\frac{a+b+c}{x+y+z}.$$

Când are loc egalitatea?

Dorin Mărghidanu, Corabia

Soluție (*Daniel Văcaru*, Pitești; *Titu Zvonaru*, Comănești). Avem $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\frac{x^2}{ax}+\frac{y^2}{by}+\frac{z^2}{cz}\geq\frac{(x+y+z)^2}{ax+by+cz}$ (*Inegalitatea lui Bergstrom*), deci $\frac{1}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}}\leq\frac{ax+by+cz}{(x+y+z)^2}$. Egalitatea are loc dacă și numai dacă $\frac{x}{ax}=\frac{y}{by}=\frac{z}{cz}$, adică $a=b=c$. Cu încă două relații analoage și cu sumare, găsim $\frac{1}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}}+\frac{1}{\frac{y}{a}+\frac{z}{b}+\frac{x}{c}}+\frac{1}{\frac{z}{a}+\frac{x}{b}+\frac{y}{c}}\leq\frac{(ax+by+cz)+(ay+bz+cx)+(az+bx+cy)}{(x+y+z)^2}$ $=\frac{(a+b+c)(x+y+z)}{(x+y+z)^2}=\frac{a+b+c}{x+y+z}$. Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

M 123. *Arătați că pentru orice $n, x, y, z > 0$ are loc inegalitatea*

$$\frac{n(n+3)(x+y)+3}{x+y+(n+1)z}+\frac{n(n+3)(y+z)+3}{y+z+(n+1)x}+\frac{n(n+3)(z+x)+3}{z+x+(n+1)y}\geq 6n+\frac{27}{(n+3)(x+y+z)}.$$

Daniel Jinga, Pitești

Soluția 1. Notăm $x+y+(n+1)z=a$, $y+z+(n+1)x=b$ și $z+x+(n+1)y=c$, deci $a,b,c>0$. Avem $a+b+c=(n+3)(x+y+z)$ și $a=x+y+z+nz$, deci $nz=a-\dfrac{a+b+c}{n+3}$ și astfel $z=\dfrac{(n+2)a-b-c}{n(n+3)}$. Analog, $x=\dfrac{(n+2)b-c-a}{n(n+3)}$ și $y=\dfrac{(n+2)c-a-b}{n(n+3)}$. Rezultă că $n(n+3)(x+y)+3=(n+1)(b+c)-2a+3$ și analoagele, deci inegalitatea din enunț devine $\dfrac{(n+1)(b+c)-2a+3}{a}+\dfrac{(n+1)(c+a)-2b+3}{b}+\dfrac{(n+1)(a+b)-2c+3}{c}\geq 6n+\dfrac{27}{a+b+c}$, adică $(n+1)\left(\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}+\dfrac{a+b}{c}\right)+3\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\geq 6(n+1)+\dfrac{27}{a+b+c}$, care este adevărată deoarece, folosind *Inegalitatea mediilor*, avem $\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}+\dfrac{a+b}{c}=\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{a}\geq 2+2+2=6$ și $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geq\dfrac{9}{a+b+c}$.

Soluția 2. (*Titu Zvonaru*, Comănești). Folosind *Inegalitatea HM-AM* avem

$$\frac{3}{x+y+(n+1)z}+\frac{3}{y+z+(n+1)x}+\frac{3}{z+x+(n+1)y}\geq\frac{27}{(n+3)(x+y+z)}. \quad (1)$$

Aplicând *Inegalitatea lui Bergstrom* și inegalitatea $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$ avem

$$\begin{aligned}(n+3)\sum\frac{x+y}{x+y+(n+1)z}&=(n+3)\sum\frac{(x+y)^2}{(x+y)^2+(n+1)(xz+yz)}\\ &\geq(n+3)\cdot\frac{4(x+y+z)^2}{2(x^2+y^2+z^2)+2(xy+yz+zx)+2(n+1)(xy+yz+zx)}\\ &=\frac{2(n+3)\sum x^2+4(n+3)\sum xy}{\sum x^2+(n+2)\sum xy}=6+\frac{2n\left(\sum x^2-\sum xy\right)}{\sum x^2+(n+2)\sum xy}\geq 6. \quad (2)\end{aligned}$$

Prin adunarea inegalității (2) înmulțită cu n cu inegalitatea (1) rezultă inegalitatea din enunț.

M 124. *Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ și $a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$ astfel încât $0<a_1\leq a_2\leq\ldots\leq a_n$. Arătați că*

$$\frac{n(n-1)}{2}\leq\sum_{1\leq i<j\leq n}\frac{3a_i^2-2a_ia_j+3a_j^2}{(a_i+a_j)^2}\leq\frac{3n(n-1)}{8}\left(\frac{a_1}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}-\frac{2}{3}\right).$$

Sorin Ulmeanu, Pitești și *Nicolae Papacu*, Slobozia

Soluție (*Titu Zvonaru*, Comănești). Prima inegalitate este adevărată pentru orice numere reale $a_1,a_2,\ldots,a_n$ neopuse două câte două, rezultând prin adunarea celor $\dfrac{n(n-1)}{2}$ relații de tipul

$$\frac{3a_i^2-2a_ia_j+3a_j^2}{(a_i+a_j)^2}=\frac{2(a_i-a_j)^2+(a_i+a_j)^2}{(a_i+a_j)^2}\geq 1.$$

Conform *Inegalității lui Kantorovich*, pentru orice $1 \leq i < j \leq n$ avem $\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i} \leq \frac{a_1}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$. A doua inegalitate din enunț rezultă prin adunarea celor $\frac{n(n-1)}{2}$ relații de tipul

$$\frac{3a_i^2 - 2a_ia_j + 3a_j^2}{(a_i + a_j)^2} \leq \frac{3a_i^2 - 2a_ia_j + 3a_j^2}{4a_ia_j} = \frac{3}{4}\left(\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i}\right) - \frac{1}{2} \leq \frac{3}{4}\left(\frac{a_1}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}\right) - \frac{1}{2}.$$

Notă. Domnul *Daniel Văcaru* din Pitești a propus o rezolvare asemănătoare, probând *Inegalitatea lui Kantorovich* în două etape: $\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i} \leq \frac{a_i}{a_n} + \frac{a_n}{a_i} \leq \frac{a_1}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$.

M 125. *Se consideră un cerc de centru O și rază R, A un punct exterior cercului și B, C, D, E patru puncte distincte situate pe cerc astfel încât $B \in (OA)$, $C \in (AD)$, $AC = R$ și $O \in (DE)$. Notăm cu x lungimea segmentului AB.*

a) Arătați că $2m(\sphericalangle BCE) = 3m(\sphericalangle BAD)$.

b) Calculați $\frac{R}{x}$ *astfel încât* $\triangle ADE$ *să fie echilateral.*

c) Calculați $\frac{R}{x}$ *astfel încât* $[AB] \equiv [CD]$.

Thanos Kalogerakis, Grecia

Soluție. a) Fie $\varphi = m(\sphericalangle BCE) = m(\sphericalangle BDE) = m(\sphericalangle DBO)$ și $\theta = m(\sphericalangle BOC) = m(\sphericalangle BAD)$. Cum $\sphericalangle DBO$ este unghi exterior pentru $\triangle ABD$, avem $\varphi = m(\sphericalangle DBO) = \theta + m(\sphericalangle ADB)$. Dar $m(\sphericalangle ADB) = \frac{m(\sphericalangle BOC)}{2} = \frac{\theta}{2}$, deci $\varphi = \frac{3\theta}{2}$ și astfel $2m(\sphericalangle BCE) = 3m(\sphericalangle BAD)$.

b) Dacă triunghiul ADE este echilateral, atunci latura sa are lungimea $2R$, iar OA fiind înălțimea sa avem $OA = R\sqrt{3}$. Astfel $x = OA - R = R\left(\sqrt{3} - 1\right)$, deci $\frac{R}{x} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

c) Dacă $AB = CD$, atunci utilizând puterea punctului A în raport cu cercul dat avem $x(x + 2R) = R(R + x)$, adică $R^2 - Rx - x^2 = 0$, deci $\left(\frac{R}{x}\right)^2 - \frac{R}{x} - 1 = 0$ și astfel $\frac{R}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (*numărul de aur*).

Notă. Domnul *Titu Zvonaru* din Comănești a propus o rezolvare asemănătoare.

M 126. *Demonstrați că în orice triunghi ABC avem:*

a) $\frac{(1+ab)(a+b)}{(1+a^2)(1+b^2)} + \frac{(1+bc)(b+c)}{(1+b^2)(1+c^2)} + \frac{(1+ca)(c+a)}{(1+c^2)(1+a^2)} \leq \frac{p^2 + r^2 - 2Rr}{4Rr}$;

b) $\frac{(1+r_ar_b)(r_a+r_b)}{(1+r_a^2)(1+r_b^2)} + \frac{(1+r_br_c)(r_b+r_c)}{(1+r_b^2)(1+r_c^2)} + \frac{(1+r_cr_a)(r_c+r_a)}{(1+r_c^2)(1+r_a^2)} \leq \frac{2R-r}{r}$.

Mihály Bencze, Brașov

Soluția 1. (*Daniel Văcaru*, Pitești). Să unificăm cele două subpuncte, considerând expresia

$$E(x, y, z) = \sum \frac{(1+xy)(x+y)}{(1+x^2)(1+y^2)},\ x, y, z > 0.$$

Considerând termenul generic $\dfrac{(1+xy)(x+y)}{(1+x^2)(1+y^2)}$, îl putem scrie ca

$$\frac{(1+xy)(x+y)}{(1+x^2)(1+y^2)}=\frac{x+y+x^2y+xy^2}{(1+x^2)(1+y^2)}\leq\frac{x+y+x^3+y^3}{(1+x^2)(1+y^2)}=\frac{x}{1+y^2}+\frac{y}{1+x^2}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right).$$

Atunci $E(x,y,z)\leq\dfrac{\sum x^2y}{2xyz}=\dfrac{\left(\sum x^2\right)(x+y+z)-\sum x^3}{2xyz}$.

Se iau acum valorile $(x,y,z)\in\{(a,b,c),(r_a,r_b,r_c)\}$ și se obțin, după calcule, inegalitățile din enunț.

Soluția 2. (*Titu Zvonaru*, Comănești). Dacă $x,y\geq 0$, aplicând *Inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz*, avem $(1+x^2)(1+y^2)=\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}\cdot\sqrt{(x^2+1)(1+y^2)}\geq(1+xy)(x+y)$, deci

$$\frac{(1+xy)(x+y)}{(1+x^2)(1+y^2)}\leq 1.$$

Folosind această inegalitate, deducem că este suficient să demonstrăm că $12Rr\leq p^2+r^2-2Rr$ la punctul a), respectiv $3r\leq 2R-r$ la punctul b). A doua inegalitate rezultă imediat din *Inegalitatea lui Euler*, $2r\leq R$, iar prima inegalitate se obține folosind și *Inegalitatea lui Gerretsen*, $p^2\geq 16Rr-5r^2$, astfel: $p^2+r^2-2Rr\geq 16Rr-5r^2+r^2-2Rr\geq 12Rr+2r(R-2r)\geq 12Rr$.

Clasa a X-a

M 127. *Fie k un număr real fixat. Determinați mulțimea*

$$M_k=\left\{2\left(b^2+c^2\right)-a^2\;\middle|\;a\geq b\geq c\geq 0,\ a+b+c=6,\ a^2+b^2+c^2=k\right\}.$$

Leonard Mihai Giugiuc, Drobeta Turnu Severin

Soluție. Fie a,b,c cu proprietățile din definiția mulțimii M_k. Deoarece $a^2+b^2+c^2\leq(a+b+c)^2\leq 3(a^2+b^2+c^2)$, rezultă $k\in[12,36]$, deci pentru $k\notin[12,36]$ avem $M_k=\emptyset$. Fie acum $k\in[12,36]$. Notând $s=b+c$ și $p=bc$, avem $s=6-a$ și $s^2-2p=k-a^2$, deci b și c sunt soluțiile ecuației $t^2-(6-a)t+a^2-6a+18-\dfrac{k}{2}=0$, $b=t_1\geq t_2=c$. Condiția $t_1,t_2\in[0,a]$ este echivalentă cu $\Delta\geq 0$, $S\in[0,2a]$, $P\geq 0$ și $P-aS+a^2\geq 0$, unde $\Delta=(6-a)^2-4\left(a^2-6a+18-\dfrac{k}{2}\right)$ este determinantul ecuației, $S=t_1+t_2=6-a$ și $P=t_1t_2=a^2-6a+18-\dfrac{k}{2}$. Efectuând calculele obținem $a\in[2,6]$, $a^2-4a+12-\dfrac{2k}{3}\leq 0$, $a^2-6a+18-\dfrac{k}{2}\geq 0$ și $a^2-4a+6-\dfrac{k}{6}\geq 0$, adică $a\in[2,6]$, $a\in\left[2-\sqrt{\dfrac{2k}{3}-8},2+\sqrt{\dfrac{2k}{3}-8}\right]$, $a\in\left(-\infty,3-\sqrt{\dfrac{k}{2}-9}\right]\cup\left[3+\sqrt{\dfrac{k}{2}-9},+\infty\right)$ - pentru $k\leq 18$ și $a\in\left(-\infty,2-\sqrt{\dfrac{k}{6}-2}\right]\cup\left[2+\sqrt{\dfrac{k}{6}-2},+\infty\right)$ - pentru $k\geq 18$. Astfel, avem două cazuri.

Cazul 1. $k \in [12, 18]$. Atunci prin intersecție obținem $a \in \left[2+\sqrt{\frac{k-12}{6}}, 2+\sqrt{\frac{2(k-12)}{3}}\right]$, și cum $2(b^2+c^2)-a^2 = 2k-3a^2$ rezultă că $M_k = \left[12-4\sqrt{6(k-12)}, \frac{3(k-4)}{2}-2\sqrt{6(k-12)}\right]$.

Cazul 2. $k \in [18, 36]$. Atunci prin intersecție obținem $a \in \left[3+\sqrt{\frac{k-18}{2}}, 2+\sqrt{\frac{2(k-12)}{3}}\right]$, și $M_k = \left[12-4\sqrt{6(k-12)}, \frac{k}{2}-9\sqrt{2(k-18)}\right]$.

M 128. *Arătați că* $\log_2 3 + \log_4 5 + \log_6 7 + \ldots + \log_{14} 15 > 7\sqrt[7]{2}$.

Dorin Mărghidanu, Corabia

Soluție. Vom demonstra, mai general, că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, avem

$$\log_2 3 + \log_4 5 + \log_6 7 + \ldots + \log_{2n}(2n+1) > n \cdot \sqrt[2n]{1+\log_2(n+1)}.$$

Într-adevăr, pentru orice $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, avem

$$\log_m(m+1) = 1 + \log_m \frac{m+1}{m} > 1 + \log_m \frac{m+2}{m+1} > 1 + \log_{m+1} \frac{m+2}{m+1} = \log_{m+1}(m+2). \quad (*)$$

Notând $P_n = \log_2 3 \cdot \log_4 5 \cdot \log_6 7 \cdot \ldots \cdot \log_{2n}(2n+1)$ și $Q_n = \log_3 4 \cdot \log_5 6 \cdot \log_7 8 \cdot \ldots \cdot \log_{2n+1}(2n+2)$ din $(*)$ rezultă că $P_n > Q_n$. Prin urmare $P_n^2 > P_n Q_n = \log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \ldots \cdot \log_{2n+1}(2n+2) = \log_2(2n+2)$, deci $P_n > \sqrt{1+\log_2(n+1)}$. Cum toți logaritmii considerați sunt pozitivi, prin aplicarea *Inegalității mediilor* avem $\log_2 3 + \log_4 5 + \log_6 7 + \ldots + \log_{2n}(2n+1) \geq n \cdot \sqrt[n]{P_n} > n \cdot \sqrt[n]{\sqrt{1+\log_2(n+1)}} = n \cdot \sqrt[2n]{1+\log_2(n+1)}$. Pentru $n = 7$ obținem inegalitatea din enunț.

M 129. *Calculați suma* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(3k^3+9k^2+11k+4)\,C_{2k+1}^k}{k+2}$, *unde* $n \in \mathbb{N}^*$.

Mihály Bencze, Brașov

Soluție. Cum $\dfrac{(3k^3+9k^2+11k+4)\,C_{2k+1}^k}{k+2} = \dfrac{[(4k+6)(k^2+k+1)-(k+2)(k^2-k+1)]\,C_{2k+1}^k}{k+2}$
$= \dfrac{(k^2+k+1)(2k+2)(2k+3)C_{2k+1}^k}{(k+1)(k+2)} - (k^2-k+1)C_{2k+1}^k = (k^2+k+1)C_{2k+3}^{k+1} - (k^2-k+1)C_{2k+1}^k$,
rezultă că $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(3k^3+9k^2+11k+4)\,C_{2k+1}^k}{k+2} = \sum_{k=1}^{n} \left[(k^2+k+1)C_{2k+3}^{k+1} - (k^2-k+1)C_{2k+1}^k\right] =$
$(n^2+n+1)C_{2n+3}^{n+1} - C_3^1 = (n^2+n+1)C_{2n+3}^{n+1} - 3$.

M 130. *Fie* $z_1, z_2, \ldots, z_{12}$ *numere complexe distincte două câte două și având modulele egale. Dacă* $|z_1-z_2| = |z_4-z_5| = |z_7-z_8| = |z_{10}-z_{11}|$, $|z_2-z_3| = |z_5-z_6| = |z_8-z_9| = |z_{11}-z_{12}|$, $|z_3-z_4| = |z_6-z_7| = |z_9-z_{10}| = |z_{12}-z_1|$ *și punctele de afixe* $z_1, z_2, \ldots, z_{12}$ *sunt, în această ordine, vârfurile unui poligon convex, atunci arătați că* $z_1+z_2+\ldots+z_{12} = 0$.

Sorin Ulmeanu, Pitești

Soluție (*Daniel Văcaru*, Pitești). Este clar că $\Delta A_1OA_2 \equiv \Delta A_4OA_5 \equiv \Delta A_7OA_8 \equiv \Delta A_{10}OA_{11}$, $\Delta A_2OA_3 \equiv \Delta A_5OA_6 \equiv \Delta A_8OA_9 \equiv \Delta A_{11}OA_{12}$ și $\Delta A_3OA_4 \equiv \Delta A_6OA_7 \equiv \Delta A_9OA_{10} \equiv \Delta A_{12}OA_1$. Din congruențele unghiurilor la centru deducem că $\widehat{A_1OA_4} \equiv \widehat{A_4OA_7} \equiv \widehat{A_7OA_{10}} \equiv \widehat{A_{10}OA_1}$ și toate măsurile acestor unghiuri congruente însumate dau 360^0, de unde deducem că $[A_1A_7]$ și $[A_4A_{10}]$ sunt diametre, adică $z_1 + z_7 = z_4 + z_{10} = 0$. În mod analog se probează, cu alegerea altor unghiuri la centru, că și $[A_2A_8]$, $[A_3A_9]$, $[A_5A_{11}]$, $|A_6A_{12}|$ sunt diametre, de unde obținem relația cerută.

M 131. *Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația*

$$n \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{n} + n \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{3\pi}{n} = 10\sqrt{10n}.$$

Ionel Tudor, Călugăreni

Soluție (*Daniel Văcaru*, Pitești). Pentru $n \in \{0, 1, 3\}$ ecuația nu are sens. Prin verificare directă se obține că nici 2, 4 și 5 nu sunt soluții ale ecuației. Pentru $n \geq 6$, rescriind ecuația sub forma

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{n} + \operatorname{ctg}^2 \frac{3\pi}{n} = 10\sqrt{\frac{10}{n}},$$

membrul stâng este o funcție crescătoare, pe când cel drept este una strict descrescătoare, deci avem cel mult o soluție. Din $\frac{2\pi}{10} + \frac{3\pi}{10} = \frac{\pi}{2}$ rezultă, succesiv: $\sin\frac{2\pi}{10} = \cos\frac{3\pi}{10}$, $2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10} = 4\cos^3\frac{\pi}{10} - 3\cos\frac{\pi}{10}$, $2\sin\frac{\pi}{10} = 4\left(1 - \sin^2\frac{\pi}{10}\right) - 3$, $4\sin^2\frac{\pi}{10} + 2\sin\frac{\pi}{10} - 1 = 0$. Se obține că $\sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, deci $\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{10}} = \frac{16}{6-2\sqrt{5}} = 6 + 2\sqrt{5}$ și $\sin\frac{3\pi}{10} = \sin\frac{\pi}{10}\left(3 - 4\sin^2\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$, deci $\frac{1}{\sin^2\frac{3\pi}{10}} = 6 - 2\sqrt{5}$. Astfel $\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{10}} + \frac{1}{\sin^2\frac{3\pi}{10}} = 12$, deci $\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{10} + \operatorname{ctg}^2\frac{3\pi}{10} = 10$. Rezultă că $n = 10$ este soluție unică pentru ecuația dată.

M 132. *Fie ABC un triunghi, I centrul cercului înscris în triunghiul ABC, iar D, E și F punctele de intersecție ale acestui cerc cu segmentele (IA), (IB), respectiv (IC). Arătați că:*

a) $\frac{\mathcal{A}_{ABC}}{\mathcal{A}_{DEF}} \geq 4$; *b)* $\frac{\mathcal{P}_{ABC}}{\mathcal{P}_{DEF}} \geq 2$.

Sorin Borodi, Dej

Soluția 1. a) Deoarece $\widehat{EIF} = \pi - \frac{B+C}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}$, avem $\mathcal{A}_{EIF} = \frac{r^2}{2}\cos\frac{A}{2}$. Analog, $\mathcal{A}_{DIF} = \frac{r^2}{2}\cos\frac{B}{2}$ și $\mathcal{A}_{DIE} = \frac{r^2}{2}\cos\frac{C}{2}$, deci

$$\mathcal{A}_{DEF} = \frac{r^2}{2}\left(\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}\right).$$

Astfel inegalitatea din enunț este echivalentă cu $\frac{r^2}{2}\left(\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}\right) \leq \frac{S}{4}$, deci cu $\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \leq \frac{p^2}{2S}$. Dar funcția $f : (0, \pi)$, $f(x) = \cos\frac{x}{2}$ este concavă, deci conform

Inegalității lui Jensen avem $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\leq 3\cos\frac{A+B+C}{6}=3\cos\frac{\pi}{6}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$, deci este suficient să demonstrăm că $\frac{3\sqrt{3}}{2}\leq\frac{p^2}{2S}$, adică $S\leq\frac{p^2}{3\sqrt{3}}$, adică $(p-a)(p-b)(p-c)\leq\frac{p^3}{27}$, inegalitate care este o consecință imediată a *Inegalității mediilor*.

b) Deoarece $\widehat{EIF}=\frac{\pi}{2}+\frac{A}{2}$, aplicând *Teorema cosinusului* în $\triangle EIF$ avem $EF^2=2r^2+2r^2\sin\frac{A}{2}$, deci $EF=r\sqrt{2\left(1+\sin\frac{A}{2}\right)}$. Analog, $DF=r\sqrt{2\left(1+\sin\frac{B}{2}\right)}$ și $DE=r\sqrt{2\left(1+\sin\frac{C}{2}\right)}$, deci

$$\mathcal{P}_{DEF}=r\sqrt{2}\left(\sqrt{1+\sin\frac{A}{2}}+\sqrt{1+\sin\frac{B}{2}}+\sqrt{1+\sin\frac{C}{2}}\right).$$

Inegalitatea din enunț devine $r\sqrt{2}\left(\sqrt{1+\sin\frac{A}{2}}+\sqrt{1+\sin\frac{B}{2}}+\sqrt{1+\sin\frac{C}{2}}\right)\leq p$, adică $\sqrt{1+\sin\frac{A}{2}}+\sqrt{1+\sin\frac{B}{2}}+\sqrt{1+\sin\frac{C}{2}}\leq\frac{p^2}{S\sqrt{2}}$. Dar funcția $g:(0,\pi)$, $g(x)=\sqrt{1+\sin\frac{x}{2}}=\sqrt{1+\cos\frac{\pi-x}{2}}=\sqrt{2}\cos\frac{\pi-x}{4}$ este concavă, deci conform *Inegalității lui Jensen* avem $\sqrt{1+\sin\frac{A}{2}}+\sqrt{1+\sin\frac{B}{2}}+\sqrt{1+\sin\frac{C}{2}}\leq 3\sqrt{1+\sin\frac{A+B+C}{6}}=3\sqrt{1+\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, deci este suficient să arătăm că $\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\leq\frac{p^2}{S\sqrt{2}}$, adică $S\leq\frac{p^2}{3\sqrt{3}}$, inegalitate demonstrată la punctul a).

Soluția 2. (*Titu Zvonaru*, Comănești). Vom folosi următoarele inegalități (a se vedea O. Bottema, *Geometric Inequalities*, Groningen, 1969):

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\leq\frac{3\sqrt{3}}{2},\quad a+b+c\leq 3\sqrt{3}R,\quad p\geq 3\sqrt{3}r.$$

a) Deoarece $m\left(\sphericalangle EIF\right)=90^\circ+\frac{A}{2}$, avem

$$\mathcal{A}_{DEF}=\mathcal{A}_{DIE}+\mathcal{A}_{EIF}+\mathcal{A}_{FID}=\frac{r^2\cos\frac{A}{2}+r^2\cos\frac{B}{2}+r^2\cos\frac{C}{2}}{2}\leq\frac{3\sqrt{3}r^2}{4}.$$

Rezultă $\frac{\mathcal{A}_{ABC}}{\mathcal{A}_{DEF}}\geq\frac{pr}{\frac{3\sqrt{3}r^2}{4}}=\frac{4p}{3\sqrt{3}r}\geq 4$.

b) Raza cercului circumscris triunghiului DEF fiind r, rezultă că

$$\frac{\mathcal{P}_{ABC}}{\mathcal{P}_{DEF}}=\frac{a+b+c}{DE+EF+FD}\geq\frac{2\cdot 3\sqrt{3}r}{3\sqrt{3}r}=2.$$

Clasa a XI-a

M 133. *Fie* $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ *și* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *astfel încât* $A^3 = (a-1)A^2 + (a+b)A + bI_n$ *și* $\det(A + I_n) \neq 0$. *Calculați* $\det(A^4 - 2aA^3 + (a^2 + c + d)A^2 - a(c+d)A + cdI_n)$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție. Folosind egalitatea din enunț avem, succesiv: $(A + I_n)(A^2 - aA - bI_n) = O_n$; $(A + I_n)(A^2 - aA) = b(A + I_n)$; $(A + I_n)(A^2 - aA + xI_n) = (b + x)(A + I_n)$, $\forall x \in \mathbb{C}$. Cum $\det(A + I_n) \neq 0$, rezultă că $\det(A^2 - aA + xI_n) = (b + x)^n$, $\forall x \in \mathbb{C}$. Prin urmare $\det(A^4 - 2aA^3 + (a^2 + c + d)A^2 - a(c+d)A + cdI_n) = \det((A^2 - aA + cI_n)(A^2 - aA + dI_n)) = \det(A^2 - aA + cI_n) \cdot \det(A^2 - aA + dI_n) = [(b+c)(b+d)]^n$.

Notă. Domnul *Daniel Văcaru* din Pitești a propus o rezolvare asemănătoare, bazată pe deducerea și utilizarea repetată a relației $A^2 = aA + bI_n$.

M 134. *Fie* $p, q, n \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât* $p < q \leq n + 1$ *și fie* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ *numere distincte două câte două. Pentru orice* $k \in \mathbb{N}^*$ *notăm* $s_k = \sum_{i=1}^{n} a_i^k$ *și* $t_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^{q+k} - a_i^{p+k}}{a_i - 1}$. *Rezolvați în* $\mathbb{R}^n$ *sistemul*

$$\begin{cases} s_1x_1 + s_2x_2 + \ldots + s_nx_n = t_1 \\ s_2x_1 + s_3x_2 + \ldots + s_{n+1}x_n = t_2 \\ \ldots \\ s_nx_1 + s_{n+1}x_2 + \ldots + s_{2n-1}x_n = t_n \end{cases}.$$

Stelian Corneliu Andronescu, *Costel Bălcău*, Pitești și

Leonard Mihai Giugiuc, Drobeta Turnu Severin

Soluție. Fie A matricea sistemului dat. Definim matricile $W, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, astfel: linia i a matricei W este egală cu $(a_1^i, \ldots, a_n^i)$ și coloana j a matricei V este egală cu $\left(a_1^{j-1}, \ldots, a_n^{j-1}\right)^T$, unde $1 \leq i, j \leq n$. Să remarcăm că $A = WV$. Avem: $\det A = \det W \cdot \det V = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) \det V^T \cdot \det V = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)^2\right) \neq 0$. Deci sistemul dat are soluție unică. În urma calculelor, obținem relativ facil că $t_k = s_{k+p} + \ldots + s_{k+q-1}$, pentru orice $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Cazul 1. $q \leq n$. Definim $x_l = \begin{cases} 1, \text{ dacă } l \in \{p+1, \ldots, q\} \\ 0, \text{ dacă } l \in \{1, \ldots, n\} - \{p+1, \ldots, q\} \end{cases}$. Evident, $(x_1, \ldots, x_n)$ este soluție a sistemului. Sistemul fiind Cramer, soluția găsită este unică.

Cazul 2. $q = n + 1$. Notăm cu $u_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i$, $u_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$, $u_3 = \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} a_i a_j a_k$, $\ldots$, $u_n = \prod_{i=1}^{n} a_i$ valorile polinoamelor simetrice fundamentale de variabile $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ avem $s_{k+n} = u_1 s_{k+n-1} - u_2 s_{k+n-2} + \ldots + (-1)^{n-1} u_n s_k$.

Dacă $p=n$, atunci definim $x_l=(-1)^{n-l}u_{n-l+1}$, pentru $l\in\{1,\ldots,n\}$. Evident, $(x_1,\ldots,x_n)$ este soluție a sistemului și, sistemul fiind Cramer, soluția găsită este unică.

Dacă $p\leq n-1$, atunci $\sum\limits_{i=p}^{n}s_{k+i}=\sum\limits_{i=1}^{p}(-1)^{n-i}u_{n-i+1}s_{k+i-1}+\sum\limits_{i=p+1}^{n}\left[1+(-1)^{n-i}u_{n-i+1}\right]s_{k+i-1}$. Definim $x_l=\begin{cases}(-1)^{n-l}u_{n-l+1},\ \text{dacă } l\in\{1,\ldots,p\}\\ 1+(-1)^{n-l}u_{n-l+1},\ \text{dacă } l\in\{p+1,\ldots,n\}\end{cases}$. Evident, $(x_1,\ldots,x_n)$ este soluție a sistemului și, sistemul fiind Cramer, soluția găsită este unică.

M 135. *Demonstrați că șirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *definit prin*

$$x_n=\frac{2C_{n+1}^2\cos\frac{\pi}{2n+1}+3C_{n+1}^3\cos\frac{3\pi}{2n+1}+4C_{n+1}^4\cos\frac{5\pi}{2n+1}+\ldots+(n+1)C_{n+1}^{n+1}\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}}{C_n^1\sin\frac{\pi}{2n+1}+C_n^2\sin\frac{3\pi}{2n+1}+C_n^3\sin\frac{5\pi}{2n+1}+\ldots+C_n^n\sin\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}}$$

este convergent și calculați limita sa.

Mihai Florea Dumitrescu, Potcoava și *Costel Bălcău*, Pitești

Soluție. Utilizând formula $(k+1)C_{n+1}^{k+1}=(n+1)C_n^k$, deducem că $x_n=\dfrac{(n+1)a_n}{b_n}$, unde $a_n=C_n^1\cos\frac{\pi}{2n+1}+C_n^2\cos\frac{3\pi}{2n+1}+\ldots+C_n^n\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}$ și $b_n=C_n^1\sin\frac{\pi}{2n+1}+C_n^2\sin\frac{3\pi}{2n+1}+\ldots+C_n^n\sin\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}$. Astfel notând $t=\dfrac{\pi}{2n+1}$ și $z=\cos t+i\sin t$ și folosind *formula lui Moivre* și *Binomul lui Newton*, avem $a_n+ib_n=C_n^1z+C_n^2z^3+\ldots+C_n^nz^{2n-1}=\dfrac{(1+z^2)^n-1}{z}=\dfrac{(1+\cos 2t+i\sin 2t)^n-1}{\cos t+i\sin t}=\dfrac{2^n\cos^n t(\cos nt+i\sin nt)-1}{\cos t+i\sin t}=2^n\cos^n t[\cos(n-1)t+i\sin(n-1)t]-\cos t+i\sin t$, deci $a_n=2^n\cos^n t\cos(n-1)t-\cos t$ și $b_n=2^n\cos^n t\sin(n-1)t+\sin t$, adică $a_n=2^n\cos^n\dfrac{\pi}{2n+1}\cos\dfrac{(n-1)\pi}{2n+1}-\cos\dfrac{\pi}{2n+1}=2^n\cos^n\dfrac{\pi}{2n+1}\sin\dfrac{3\pi}{4n+2}-\cos\dfrac{\pi}{2n+1}$ și $b_n=2^n\cos^n\dfrac{\pi}{2n+1}\sin\dfrac{(n-1)\pi}{2n+1}+\sin\dfrac{\pi}{2n+1}=2^n\cos^n\dfrac{\pi}{2n+1}\cos\dfrac{3\pi}{4n+2}+\sin\dfrac{\pi}{2n+1}$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n\dfrac{\pi}{2n+1}\overset{(1^\infty)}{=}e^{\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\cos\frac{\pi}{2n+1}-1\right)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-2n\sin^2\frac{\pi}{4n+2}\right)}=e^0=1$, iar $x_n=\dfrac{(n+1)a_n}{b_n}=\dfrac{2^n\left[(n+1)\sin\frac{3\pi}{4n+2}\cos^n\frac{\pi}{2n+1}-\frac{n+1}{2^n}\cos\frac{\pi}{2n+1}\right]}{2^n\left(\cos\frac{3\pi}{4n+2}\cos^n\frac{\pi}{2n+1}+\frac{1}{2^n}\sin\frac{\pi}{2n+1}\right)}$ și $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\sin\dfrac{3\pi}{4n+2}=\dfrac{3\pi}{4}$, rezultă că $x_n\to\dfrac{3\pi}{4}$ (deci este convergent).

M 136. *Arătați că* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{e^{2k}}\leq\frac{1}{4}$.

Sladjan Stankovik, Macedonia de Nord

Soluție (*Leonard Mihai Giugiuc*, Drobeta Turnu Severin). Pentru fiecare $n\geq 3$ arbitrar fixat notăm $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}x^k=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}, x\in(0,1)$. Avem $f'(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}kx^{k-1}$, deci $xf'(x)=$

$\sum_{k=1}^{n} kx^k$, pentru orice $x \in (0,1)$, și $f''(x) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)x^{k-2}$, deci $x^2 f''(x) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)x^k = \sum_{k=1}^{n} k(k-1)x^k = \sum_{k=1}^{n} k^2x^k - \sum_{k=1}^{n} kx^k = \sum_{k=1}^{n} k^2x^k - xf'(x)$, pentru orice $x \in (0,1)$. Așadar $\sum_{k=1}^{n} k^2x^k = x^2 f''(x) + xf'(x)$, deci pentru orice $x \in (0,1)$ avem

$$\sum_{k=1}^{n} k^2x^k = x^2 \cdot \frac{n(n+1)x^{n-1}(x-1)^2 - 2\left[nx^n(x-1) - x^n + 1\right]}{(x-1)^3} + x \cdot \frac{nx^n(x-1) - x^n + 1}{(x-1)^2}.$$

Lemă. Dacă $\alpha > 0$ și $x \in (0,1)$ atunci $\lim_{n\to\infty} n^\alpha x^n = 0$.

Într-adevăr, cum $\frac{(n+1)^\alpha x^{n+1}}{n^\alpha x^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \cdot x \to x \in (0,1)$ (pentru $n \to \infty$), conform *Criteriului 1 al raportului*, rezultă concluzia lemei.

Conform lemei, $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} k^2x^k = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$, adică $\sum_{k=1}^{\infty} k^2x^k = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$, pentru orice $x \in (0,1)$. Pentru $x = \frac{1}{e^2}$ obținem $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{e^{2k}} = \frac{e^2(e^2+1)}{(e^2-1)^3}$. Demonstrăm în continuare că $\frac{y(y+1)}{(y-1)^3} \le \frac{1}{4}$ pentru $y = e^2$. Inegalitatea este echivalentă cu $y^3 - 7y^2 - y - 1 \ge 0$. Avem $(x^3 - 7x^2 - x - 1)' = 3x^2 - 14x - 1$, deci funcția $x^3 - 7x^2 - x - 1$ este strict crescătoare pe $[6,\infty)$. Cum $y = e^2 > 2{,}7^2 > \frac{36}{5}$, rezultă că $y^3 - 7y^2 - y - 1 > \left(\frac{36}{5}\right)^3 - 7\left(\frac{36}{5}\right)^2 - \frac{36}{5} - 1 = \frac{1296}{125} - \frac{36}{5} - 1 > 10 - \frac{36}{5} - 1 > 0$. Demonstrația este încheiată.

M 137. *Fie S suma soluțiilor din intervalul $(0,2\pi)$ ale ecuației* $(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} x} = 3^{\sin x}$.

Arătați că $S \in \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Daniel Jinga, Pitești

Soluție. Din condițiile de existență rezultă că $x \in (0,2\pi) \setminus \left\{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$.

Cazul 1. Dacă $\operatorname{tg} x > 0$, atunci $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ și prin logaritmare ecuația devine $\operatorname{tg} x \ln \operatorname{tg} x = \ln 3 \sin x$, adică $\ln \operatorname{tg} x = \ln 3 \cos x$, (1), adică $3^{\cos x} = \operatorname{tg} x$. Pentru $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ observăm că $x = \frac{\pi}{3}$ este soluție unică, deoarece $3^{\cos x}$ este funcție strict descrescătoare, iar $\operatorname{tg} x$ este funcție strict crescătoare. Fie acum $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$. Dacă $x \in \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right)$, atunci $\operatorname{tg} x \ge 1$, deci $\ln \operatorname{tg} x \ge 0$, iar $\ln 3 \cos x < 0$, deci conform (1) ecuația nu are soluții. Dacă $x \in \left[\frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}\right)$, atunci $\operatorname{tg} x \ge \frac{1}{\sqrt{3}}$, deci $\ln \operatorname{tg} x \ge -\frac{\ln 3}{2}$, iar $\ln 3 \cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \ln 3 < -\frac{\ln 3}{2}$, deci din nou ecuația nu are soluții. Dacă $x \in \left(\pi, \frac{7\pi}{6}\right)$, atunci considerând funcția $f(x) = 3^{\cos x} - \operatorname{tg} x$

avem $f'(x) = -3^{\cos x} \cdot \ln 3 \cdot \sin x - \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{-1 - \ln 3 \cdot \sin x \cdot \cos^2 x \cdot 3^{\cos x}}{\cos^2 x}$. Dar $\cos x < 0$, deci $0 < 3^{cosx} < 1$, $-\dfrac{1}{2} < \sin x < 0$, deci $0 < -\sin x < \dfrac{1}{2}$ și $\ln 3 < 2$, deci prin înmulțire avem $0 < -\ln 3 \cdot \sin x \cdot \cos^2 x \cdot 3^{\cos x} < 1$, de unde rezultă că $f'(x) < 0$ pentru orice $x \in \left(\pi, \dfrac{7\pi}{6}\right)$. Astfel f este strict descrescătoare și cum $\lim\limits_{\substack{x \to \pi \\ x > \pi}} f(x) = \dfrac{1}{3} > 0$ și $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{7\pi}{6} \\ x < \frac{7\pi}{6}}} f(x) = 3^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} - 3^{-\frac{1}{2}} < 0$ rezultă că ecuația are o soluție unică $\alpha \in \left(\pi, \dfrac{7\pi}{6}\right)$.

Cazul 2. Dacă $\operatorname{tg} x < 0$, atunci $\operatorname{tg} x \in \mathbb{Z}$, pentru a exista $(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} x}$. Cum $\operatorname{tg} x < 0$ și $3^{\sin x} > 0$, rezultă că $\operatorname{tg} x = -2k$ cu $k \in \mathbb{N}^*$, deci ecuația devine $3^{\sin x} = \dfrac{1}{(2k)^{2k}}$. Dar $\sin x \geq -1$, deci $3^{\sin x} \geq \dfrac{1}{3}$ și $\dfrac{1}{(2k)^{2k}} \leq \dfrac{1}{4}$, deci ecuația nu are soluție.

În concluzie, ecuația are exact două soluții, $\dfrac{\pi}{3}$ și $\alpha \in \left(\pi, \dfrac{7\pi}{6}\right)$, deci $S \in \left(\dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

M 138. *Rezolvați în* $\mathbb{R}^3$ *sistemul* $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ \left(x^2 + \dfrac{1}{2}\right)\left(y^2 + \dfrac{1}{2}\right)\left(z^2 + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{169 - 15\sqrt{5}}{64} \end{cases}$.

Florentin Vișescu, București

Soluție (*Leonard Mihai Giugiuc*, Drobeta Turnu Severin). Notăm

$$E(x, y, z) = \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)\left(y^2 + \frac{1}{2}\right)\left(z^2 + \frac{1}{2}\right).$$

Cazul 1. $x, y, z \geq 0$. Fie $xy + yz + zx = 3(1 - t^2)$, $0 \leq t \leq 1$. Cum $x + y + z = 3$, atunci $E(x, y, z) = \dfrac{1}{8} + \dfrac{3}{4} \cdot (2t^2 + 1) + \dfrac{9}{2} \cdot (1 - t^2)^2 - 3p + p^2$, unde $p = xyz$. Evident, $p \geq 0$ și, din *Inegalitatea mediilor*, $p \leq 1$. Fie funcția pătratică $q(p) = -3p + p^2$, definită pe mulțimea numerelor reale. Evident, $q(p)$ este strict descrescătoare pe $\left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right]$. Deducem că, în particular, $q(p)$ este strict descrescătoare pe $[0, 1]$. În concluzie, pentru fiecare t fixat în $[0, 1]$, $E(x, y, z)$ este minimă atunci când p este maxim. Dar $\max p = (1 - t)^2 (1 + 2t)$ și se atinge în $(1 - t, 1 - t, 1 + 2t)$ și permutările sale. Deci $E(x, y, z) \geq f(t)$, unde $f(t) = \dfrac{1}{8} + \dfrac{3}{4} \cdot (2t^2 + 1) + \dfrac{9}{2} \cdot (1 - t^2)^2 - 3(1 - t)^2 (1 + 2t) + (1 - t)^4 (1 + 2t)^2$, pentru orice $x \in [0, 1]$. Avem $f'(t) = 3t\left[1 + 6(t^2 - 1) - 6(t - 1) + 4(2t + 1)(t - 1)^3\right] = 3t(4t^2 - 2t - 1)(2t^2 - 4t + 3)$, pentru orice $t \in [0, 1]$, deci $\min\limits_{t \in [0,1]} f(t) = f\left(\dfrac{1 + \sqrt{5}}{4}\right) = \dfrac{169 - 15\sqrt{5}}{64}$. Așadar în acest caz avem soluțiile $(x, y, z) = \left(\dfrac{3 - \sqrt{5}}{4}, \dfrac{3 - \sqrt{5}}{4}, \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)$ și permutările sale.

Cazul 2. Cel puțin unul dintre x, y, z este mai mic ca 0, deci și cel puțin unul dintre x, y, z este mai mare ca 0. Fie $3s = |x| + |y| + |z|$. Cum $|x| + |y| + |z| > x + y + z = 3$, rezultă că

$s > 1$. Din demonstrația de mai sus, avem $\left(\frac{x^2}{s^2}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{y^2}{s^2}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{z^2}{s^2}+\frac{1}{2}\right) \geq \frac{169-15\sqrt{5}}{64}$. Dar $E(x,y,z) > \left(\frac{x^2}{s^2}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{y^2}{s^2}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{z^2}{s^2}+\frac{1}{2}\right)$. În concluzie, în acest caz nu există soluții.

Clasa a XII-a

M 139. *Arătați că nu există $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ astfel încât inelul claselor de resturi $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ să aibă exact* 2020 *de elemente inversabile.*

Stelian Corneliu Andronescu și *Costel Bălcău*, Pitești

Soluție. Fie $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Considerând descompunerea în factori primi $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{k_r}$, numărul de elemente inversabile ale inelului $\mathbb{Z}_n$ este

$$\varphi(n) = \varphi(n_1) \cdot \varphi(n_2) \cdot \ldots \cdot \varphi(n_r), \text{ unde } n_i = p_i^{k_i} \text{ și } \varphi(n_i) = p_i^{k_i-1}(p_i - 1),$$

pentru orice $i \in \{1, \ldots, r\}$. Observăm că $\varphi(n_i)$ este impar dacă și numai dacă $p_i = 2$ și $k_i = 1$, adică $n_i = 2$. Evident, $\varphi(2) = 1$. Trebuie să demonstrăm că $\varphi(n) \neq 2020$. Să presupunem, prin reducere la absurd, ca $\varphi(n) = 2020$, adică

$$2020 = \varphi(n_1) \cdot \varphi(n_2) \cdot \ldots \cdot \varphi(n_r).$$

Cum $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$, descompunerile lui 2020 ca produs de numere naturale pare sau egale cu 1 sunt $2020 = 2020 = 1 \cdot 2020 = 2 \cdot 1010 = 1 \cdot 2 \cdot 1010 = 10 \cdot 202 = 1 \cdot 10 \cdot 202$, deci avem de analizat următoarele cazuri.

Cazul 1. $2020 = 2020$, adică $r = 1$ și $\varphi(n_1) = 2020$. Atunci $p_1^{k_1-1}(p_1 - 1) = 2020$. Pentru $k_1 = 1$ rezultă $p_1 = 2021$, fals ($2021 = 43 \cdot 47$). Pentru $k_1 \geq 2$ rezultă că p_1 divide 2020, deci $p_1 \in \{2, 5, 101\}$, deci $2^{k_1-1} = 2020$ sau $5^{k_1-1} \cdot 4 = 2020$ sau $101^{k_1-1} \cdot 100 = 2020$, fals.

Cazul 2. $2020 = 1 \cdot 2020$, adică $r = 2$, $\varphi(n_1) = 1$ și $\varphi(n_2) = 2020$, fals (conform Cazului 1).

Cazul 3. $2020 = 2 \cdot 1010$, adică $r = 2$, $\varphi(n_1) = 2$ și $\varphi(n_2) = 1010$. Atunci $p_2^{k_2-1}(p_2 - 1) = 1010$. Pentru $k_2 = 1$ rezultă $p_2 = 1011$, fals (1011 se divide cu 3). Pentru $k_2 \geq 2$ rezultă că p_2 divide 1010, deci $p_2 \in \{2, 5, 101\}$, deci $2^{k_2-1} = 1010$ sau $5^{k_2-1} \cdot 4 = 1010$ sau $101^{k_2-1} \cdot 100 = 1010$, fals.

Cazul 4. $2020 = 1 \cdot 2 \cdot 1010$, adică $r = 3$, $\varphi(n_1) = 1$, $\varphi(n_2) = 2$ și $\varphi(n_3) = 1010$, fals (conform Cazului 3).

Cazul 5. $2020 = 10 \cdot 202$, adică $r = 2$, $\varphi(n_1) = 10$ și $\varphi(n_2) = 202$. Atunci $p_2^{k_2-1}(p_2 - 1) = 202$. Pentru $k_2 = 1$ rezultă $p_2 = 203$, fals (203 se divide cu 7). Pentru $k_2 \geq 2$ rezultă că p_2 divide 202, deci $p_2 \in \{2, 101\}$, deci $2^{k_2-1} = 202$ sau $101^{k_2-1} \cdot 100 = 202$, fals.

Cazul 6. $2020 = 1 \cdot 10 \cdot 202$, adică $r = 3$, $\varphi(n_1) = 1$, $\varphi(n_2) = 10$ și $\varphi(n_3) = 202$, fals (conform Cazului 5).

În concluzie, nu există n astfel încât $\varphi(n) = 2020$ și demonstrația este încheiată.

M 140. *Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Demonstrați că cel mai mare divizor comun al polinoamelor $f = X^n + aX + b$ și $g = X^{n+1} + cX + d$ este un polinom de grad mai mic sau egal cu 2.*

Cristinel Mortici, Viforâta

Soluție (*Daniel Văcaru*, Pitești). Fie d cel mai mare divizor comun al lui f și g. Atunci d divide și polinomul $g - X \cdot f$. Dar $g - X \cdot f = (X^{n+1} + cX + d) - X \cdot (X^n + aX + b) = -aX^2 + (c - b)\, X + d$, de unde concluzia.

M 141. *Fie $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 1$. Calculați integrala*

$$I = \int_1^{2a-1} \frac{\left(1 + \sqrt{x^2 - 2ax + a^2 + 1}\right)\left(1 - \sqrt[3]{(x-1)(x-a)(x-2a+1)\cos \pi t}\right)}{x^2 - 2ax + a^2 + 1}\, dx.$$

Marin Chirciu, Pitești (Enunț modificat)

Soluție. Cu substituția $x = 2a - t$ obținem

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{2a-1} \frac{\left(1 + \sqrt{t^2 - 2at + a^2 + 1}\right)\left(1 + \sqrt[3]{(t-1)(t-a)(t-2a+1)\cos \pi t}\right)}{t^2 - 2at + a^2 + 1}\, dt \\ &= \int_1^{2a-1} \frac{1 + \sqrt{t^2 - 2at + a^2 + 1}}{t^2 - 2at + a^2 + 1}\, dt - I, \end{aligned}$$

deci $2I = \displaystyle\int_1^{2a-1} \frac{1}{\sqrt{(t-a)^2 + 1}}\, dt + \int_1^{2a-1} \frac{1}{(t-a)^2 + 1}\, dt = \ln\left(t - a + \sqrt{(t-a)^2 + 1}\right)\Big|_1^{2a-1} +$ $\operatorname{arctg}(t-a)\Big|_1^{2a-1} = \ln \dfrac{a - 1 + \sqrt{(a-1)^2 + 1}}{\sqrt{(a-1)^2 + 1} - (a-1)} + \operatorname{arctg}(a-1) - \operatorname{arctg}(1-a) = 2\operatorname{arctg}(a-1) +$ $2 \ln\left(a - 1 + \sqrt{(a-1)^2 + 1}\right)$, deci $I = \operatorname{arctg}(a-1) + \ln\left(a - 1 + \sqrt{(a-1)^2 + 1}\right)$.

M 142. *Fie $f : [0, 2] \to [0, \infty)$ o funcție derivabilă și crescătoare. Arătați că*

$$4 \int_1^2 f(x)\, dx \leq 4 \int_1^2 x^2 f(x)\, dx - \int_0^2 x^2 f(x)\, dx.$$

Daniel Jinga, Pitești

Soluție. Fie F o primitivă a lui f. Considerăm funcția $g : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = xF(x)$. Atunci, folosind ipoteza, g este de două ori derivabilă și $g'(x) = F(x) + xf(x)$, $g''(x) = 2f(x) + xf'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [0, 2]$, deci g este convexă. Astfel, avem

$$\begin{aligned} \int_1^2 g(x)\, dx &= \lim_{n\to\infty} \frac{2-1}{n} \sum_{k=1}^{n} g\left(1 + \frac{2-1}{n} \cdot k\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2k}{n}\right) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} g(2) + \frac{1}{2} g\left(\frac{2k}{n}\right)\right) = \frac{1}{2} g(2) + \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{2k}{n}\right) \\ &= \frac{1}{2} g(2) + \frac{1}{4} \lim_{n\to\infty} \frac{2-0}{n} \sum_{k=1}^{n} g\left(0 + \frac{2-0}{n} \cdot k\right) = \frac{1}{2} g(2) + \frac{1}{4} \int_0^2 g(x)\, dx. \end{aligned}$$

Prin urmare, $\int_1^2 xF(x)\,dx \le F(2) + \frac{1}{4}\int_0^2 xF(x)\,dx$. Integrând prin părți, obținem

$$\frac{x^2}{2}\cdot F(x)\Big|_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 x^2 f(x)\,dx \le F(2) + \frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{2}\cdot F(x)\Big|_0^2 - \frac{1}{2}\int_0^2 x^2 f(x)\,dx\right),$$

adică $2F(2) - \frac{1}{2}F(1) - \frac{1}{2}\int_1^2 x^2 f(x)\,dx \le F(2) + \frac{1}{2}F(2) - \frac{1}{8}\int_0^2 x^2 f(x)\,dx$, adică $\frac{1}{2}\left(F(2) - F(1)\right) \le \frac{1}{2}\int_1^2 x^2 f(x)\,dx - \frac{1}{8}\int_0^2 x^2 f(x)\,dx$. Înmulțind cu 8 și ținând cont că F este primitivă a lui f, deci $F(2) - F(1) = \int_1^2 f(x)\,dx$, rezultă inegalitatea din enunț.

Observație. Problema se poate generaliza astfel: Dacă $b > 0$ și $f : [0, b] \to [0, \infty)$ este o funcție derivabilă și crescătoare, atunci pentru orice $a \in (0, b)$ avem

$$\left(\frac{ab}{b-a}\right)^2 \int_a^b f(x)\,dx \le \left(\frac{b}{b-a}\right)^2 \int_a^b x^2 f(x)\,dx - \int_0^b x^2 f(x)\,dx.$$

M 143. *Fie a, b, c și d numere reale nenegative. Arătați că*

$$\sqrt{\sum (a-b)^2} + 4\sqrt[3]{\frac{abc + abd + acd + bcd}{4}} \ge a + b + c + d,$$

unde $\sum (a-b)^2 = (a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 + (c-d)^2$.

Când are loc egalitatea?

Leonard Mihai Giugiuc, Drobeta Turnu Severin

Soluție. Putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că $a + b + c + d = 4$. Cum $4 \le a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \le 16$, atunci există $t \in [0, 1]$ astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4\left(3t^2 + 1\right)$. De aici, $ab + bc + cd + da + ac + bd = 6\left(1 - t^2\right)$. Utilizăm următorul rezultat.
Lemă (**M 115**, punctul a)). Fie $a, b, c, d \ge 0$ astfel încât $a + b + c + d = 4$. Atunci

$$16 + 8\left(\frac{abc + abd + acd + bcd}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \ge 4\left(ab + bc + cd + da + ac + bd\right).$$

Mai mult, egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = d = 1$ sau $a = b = 2$, $c = d = 0$ și permutările lor.

Inegalitatea de demonstrat se scrie ca $t\sqrt{3} + \sqrt[3]{\frac{abc + abd + acd + bcd}{4}} \ge 1$. Conform Lemei, $\left(\frac{abc + abd + acd + bcd}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \ge 1 - 3t^2$. Dacă $0 \le t \le \frac{1}{\sqrt{3}}$, atunci $\sqrt[3]{\frac{abc + abd + acd + bcd}{4}} \ge \sqrt{1 - 3t^2}$. Deci este suficient să arătăm că $t\sqrt{3} + \sqrt{1 - 3t^2} \ge 1$, adică $2t\sqrt{3}\left(1 - t\sqrt{3}\right) \ge 0$, ceea ce este evident adevărat. Dacă $\frac{1}{\sqrt{3}} \le t \le 1$, atunci $t\sqrt{3} + \sqrt[3]{\frac{abc + abd + acd + bcd}{4}} \ge t\sqrt{3} \ge 1$. Demonstrația este completă. Cum **M 115** implică inegalitatea curentă, atunci aceasta nu poate avea cazuri suplimentare de egalitate. Remarcăm că aceleași cazuri de la **M 115** au loc și aici. În concluzie, egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = d$ sau $(a, b, c, d) = (k, k, 0, 0)$ și permutarile sale, $k > 0$.

M 144. *Fie funcția* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(a,b)=\dfrac{(a+b+2)^2}{a^2+b^2+2}$. *Determinați valorile* $k\in\mathbb{R}$ *pentru care inegalitatea*

$$(a+b+2)^2(ab+2a+2b+1)^2\geq 144ab(a^2+b^2+2)$$

are loc pentru orice numere reale a *și* b *astfel încât* $f(a,b)=k$.

Michael Rozenberg, Israel și *Leonard Mihai Giugiuc*, România

Soluție. Din *Inegalitatea lui Jensen* pentru funcția pătratică, $(a+b+2)^2\leq 4\left(a^2+b^2+2\right)$, deci $k\leq 4$. Evident, $k\geq 0$. Mai mult, dacă, prin absurd, am avea $k=0$, atunci alegem numerele $a=b=-1$ și obținem $0\geq 576$, ceea ce este fals, deci $k>0$. În continuare, vom studia inegalitatea

$$(a+b+c+d)^2(ab+bc+cd+da+ac+bd)^2\geq 144abcd\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right),$$

unde a,b,c și d sunt numere reale, cu $a+b+c+d\neq 0$. Putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că $a+b+c+d=4$. Deci ultima inegalitate devine

$$(ab+bc+cd+da+ac+bd)^2\geq 9abcd\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right).$$

Fie $a^2+b^2+c^2+d^2=4\left(1+3t^2\right)$, $t\geq 0$. Utilizând rezultatele din articolul *Some Refinements of the $AM-GM$ and Suranyi Inequalities* din RecMat 2/2020, avem:

$$\max(abcd)=\begin{cases}(1-t)^3(1+3t), & \text{dacă } 0\leq t\leq \dfrac{2}{3}\\ (3t^2-1)^2, & \text{dacă } t\geq \dfrac{2}{3}\end{cases}.$$

Așadar dacă $0\leq t\leq \dfrac{2}{3}$, atunci vom studia inegalitatea $(1-t^2)^2\geq(1-t)^3(1+3t)(1+3t^2)$, care este echivalentă cu $t^2(1-t)^2(1-3t)^2\geq 0$, deci este adevărată. Dacă $t\geq\dfrac{2}{3}$, atunci vom studia inegalitatea $(1-t^2)^2\geq(3t^2-1)^2(1+3t^2)$, obținând soluția $\dfrac{2}{3}\leq t\leq\sqrt{\dfrac{5+2\sqrt{13}}{27}}$. Astfel, $t\in\left[0,\sqrt{\dfrac{5+2\sqrt{13}}{27}}\right]$. Așadar inegalitatea în patru variabile are loc pentru orice a,b,c,d cu $\dfrac{(a+b+c+d)^2}{a^2+b^2+c^2+d^2}$ fixat dacă și numai dacă $\left(\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}\right)^2\leq\dfrac{(a+b+c+d)^2}{a^2+b^2+c^2+d^2}\leq 4$, $(*)$. Fie $k\in(0,4]$ și fie $a=b=\dfrac{1-\sqrt{\dfrac{4-k}{k}}}{1+\sqrt{\dfrac{4-k}{k}}}$ și $c=d=1$. Avem: $\dfrac{(a+b+c+d)^2}{a^2+b^2+c^2+d^2}=k$. Deci pentru orice $k\in(0,4]$ există $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(a,b)=k$. Prin urmare, utilizând și $(*)$, rezultă că dacă $\left(\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}\right)^2\leq k\leq 4$, atunci $(a+b+2)^2(ab+2a+2b+1)^2\geq 144ab\left(a^2+b^2+2\right)$ are loc pentru orice numere reale a și b astfel încât $f(a,b)=k$. Fie acum $0<k<\left(\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}\right)^2$ și fie

$a = b = \dfrac{1 - \sqrt{\dfrac{4-k}{k}}}{1 + \sqrt{\dfrac{4-k}{k}}}$. Notăm $\sqrt{\dfrac{4-k}{3k}} = t > \sqrt{\dfrac{5+2\sqrt{13}}{27}}$. Deci $(1-t^2)^2 < (3t^2-1)^2 (1+3t^2)$, de unde rezultă că $(a+b+2)^2(ab+2a+2b+1)^2 < 144ab(a^2+b^2+2)$. Așadar domeniul cerut de valori ale lui k este intervalul $\left[\left(\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}\right)^2, 4\right]$.

Probleme propuse pentru liceu

Clasa a IX-a

M 165. Se consideră șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $x_1 = 1$ și

$$\sqrt{x_{n+1}} = \frac{\sqrt{x_n} + \sqrt{x_n + 4x_n^2}}{2},\ \forall\, n \geq 1.$$

Demonstrați că $(x_n)_{n\geq 1}$ este crescător, nemărginit și

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k x_{k+1}} < \frac{1}{2},\ \forall\, n \geq 1.$$

Cristinel Mortici, Viforâta

M 166. Fie $d_1 < d_2 < \ldots < d_k$ divizorii naturali ai unui număr natural $n \geq 2$. Arătați că:

a) $(n-1)\left(\frac{d_2}{d_1} + \frac{d_3}{d_2} + \ldots + \frac{d_k}{d_{k-1}}\right) \geq (k-1)(n-1) + d_1 + d_2 + \ldots + d_{k-1}$;

b) $(n-1)^{k-1} d_k \geq (n-1+d_1)(n-1+d_2) \cdot \ldots \cdot (n-1+d_{k-1})$.

Mihály Bencze, Brașov

M 167. Fie $a, b, c, d > 0$ astfel încât $abcd = 1$. Demonstrați că

$$(a+b+c+d)^3 \left(\frac{1}{a^3+15} + \frac{1}{b^3+15} + \frac{1}{c^3+15} + \frac{1}{d^3+15}\right) \geq 16.$$

Marin Chirciu și *Octavian Stroe*, Pitești

M 168. Fie ABC un triunghi și M mijlocul laturii AC. Considerăm punctul D pe dreapta BC astfel încât B este situat între C și D, iar $BD = AB$. Dacă dreapta DM intersectează bisectoarea unghiului B în punctul E, să se calculeze unghiul $\sphericalangle EAB$ în funcție de unghiurile triunghiului ABC.

Titu Zvonaru, Comănești

M 169. Demonstrați că numerele $\sin 2021^\circ$ și $\cos 2021^\circ$ sunt iraționale.

* * *

Clasa a X-a

M 170. Fie $0 \leq x_1, x_2, \ldots, x_n < 1$, $n \geq 3$ astfel încât $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$ și $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{x_i}{1-x_i} \leq 2$.

Demonstrați că

$$(n-2)\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{(1-x_i)^2} - \frac{n}{(n-1)^2}\right] \geq (2n-1)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1-x_i} - \frac{n}{n-1}\right)^2.$$

Când are loc egalitatea?

Vasile Cîrtoaje, Ploiești și *Leonard Mihai Giugiuc*, Drobeta Turnu Severin

M 171. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$\frac{55 - 9^{\frac{1}{x}}}{5 + 9^{\frac{1}{x}}} = \frac{50}{1 + 5^x}.$$

Sorin Ulmeanu, Pitești

M 172. Dacă $a, b, c, d \in (0,1)$ sau $a, b, c, d \in (1, \infty)$, demonstrați că

$$\frac{\log_a b}{c+d} + \frac{\log_b c}{d+a} + \frac{\log_c d}{a+b} + \frac{\log_d a}{b+c} \geq \frac{8}{a+b+c+d}.$$

Dorin Mărghidanu, Corabia

M 173. Pentru orice număr natural $n \in \mathbb{N}$, arătați că

$$\frac{(2^{2021} \cdot n)!}{n! \cdot (n+1)! \cdot (2n+1)! \cdot (4n+1)! \cdot (8n+1)! \cdot \ldots \cdot (2^{2020} \cdot n + 1)!} \in \mathbb{N}^*.$$

Stelian Corneliu Andronescu și *Costel Bălcău*, Pitești

M 174. Fie ABC un triunghi și fie D și E două puncte situate pe laturile (AC), respectiv (AB). Considerăm două puncte distincte M și N situate pe segmentul (DE). Notăm cu x, y și z distanțele de la punctul M la dreptele BC, CA, respectiv AB. Analog, notăm cu u, v și w distanțele de la punctul N la dreptele BC, CA, respectiv AB.

Demonstrați că dacă $x = y + z$ și $u = v + w$, atunci BD și CE sunt bisectoarele interioare din B, respectiv C ale triunghiului ABC.

Dan Ștefan Marinescu, Hunedoara

Clasa a XI-a

M 175. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculați A^{2021}.

* * *

M 176. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d & 0 \\ k & l & m & 0 & -d \\ n & p & 0 & -m & -c \\ q & 0 & -p & -l & -b \\ 0 & -q & -n & -k & -a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_5(\mathbb{Z})$.

a) Arătați că dacă produsul *abcdklmnpq* nu se divide cu 4, atunci rang $(A) = 4$.

b) Rămâne afirmația adevărată dacă produsul *abcdklmnpq* nu se divide cu 8?

Stelian Corneliu Andronescu și *Costel Bălcău*, Pitești

M 177. Fie $a > 0$ un număr real fixat și fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin

$$x_1 = a \text{ și } x_n = n\,(a + x_{n-1})\,,\ \forall\, n \geq 2.$$

Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{a}{x_1}\right)\left(1 + \dfrac{a}{x_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \dfrac{a}{x_n}\right)$.

Marin Chirciu, Pitești

M 178. Fie $a, b, c \in (0, 1)$. Demonstrați că

$$(a+b)(b+c)(c+a)\left(a^b + c\right)\left(b^c + a\right)\left(c^a + b\right) > a^{1-bc} \cdot b^{1-ca} \cdot c^{1-ab}.$$

Dorin Mărghidanu, Corabia

M 179. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$, $n \geq 3$ astfel încât $\sum\limits_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j > \dfrac{n(n-1)}{2}$.

a) Demonstrați că dacă $\dfrac{2}{n} < \beta \leq 1$, atunci

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + n\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\beta} > \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2. \qquad (*)$$

b) Arătați că dacă $\beta \in \left(-\infty, \dfrac{2}{n}\right] \cup (1, +\infty)$, atunci inegalitatea $(*)$ nu este întotdeauna adevărată.

Leonard Mihai Giugiuc, Drobeta Turnu Severin

Clasa a XII-a

M 180. Rezolvați în $\mathbb{Z}_{2021}$ ecuația $\widehat{505}x^2 + \widehat{1} = \widehat{0}$.

Stelian Corneliu Andronescu și *Costel Bălcău*, Pitești

M 181. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, fie x_k, $k \in \{1, 2, , \ldots, 5n\}$ rădăcinile complexe ale ecuației

$$\left(x^5 + x^3 + x + 1\right)^n = x.$$

Arătați că $\displaystyle\sum_{k=1}^{5n} \frac{1}{1 - x_k} = \frac{9n \cdot 4^{n-1} - 1}{4^n - 1}$.

Mihály Bencze, Brașov

M 182. Calculați

$$\int \frac{3x^2 + 2x + 1}{9x^4 + 3x^2 + 6x + 2}\, dx,\ x \in \mathbb{R}.$$

Sorin Ulmeanu, Pitești

M 183. Arătați că există o singură funcție $f : [0, \infty) \to [1, \infty)$ astfel încât

$$f(x) = x + \sqrt{f(x)},\ \forall\, x \geq 0.$$

Demonstrați că funcția f este continuă și calculați $\displaystyle\int_0^6 f(x)\, dx$.

Cristinel Mortici, Viforâta

M 184. a) Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$ și $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$. Demonstrați că

$$(n-1)\left[(n-2)\sum_{i=1}^{n} a_i^n + 2n \cdot \prod_{i=1}^{n} a_i\right] \geq \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \left(a_i^{n-3} + a_j^{n-3}\right).$$

b) Demonstrați sau infirmați următoarea afirmație: dacă $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{R}$, $1 < k < n - 1$ și $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$, atunci

$$(n-1)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{k-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i^{n-k+1} + n^k \cdot \prod_{i=1}^{n} a_i \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^k \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i^{n-k}.$$

Leonard Mihai Giugiuc, Drobeta Turnu Severin

PROBLEME DE INFORMATICĂ PENTRU CONCURSURI

Probleme propuse

Clasa a IX-a

I 91 (**cifre de 0**)**.** Se dau două numere naturale a și b. Notăm cu P produsul numerelor naturale din intervalul $[a, b]$.

Cerință

Cunoscând a și b se cere să se determine in câte cifre de 0 se termină P.

Restricții

- a și b sunt numere naturale cu maxim 10 cifre.
- $a < b$, $b - a < 100000$.

Exemplu

Date de intrare

$a = 11$, $b = 26$

Date de ieșire 4

Doru Anastasiu Popescu, Pitești

I 92 (**litere mici**)**.** Se dă un șir de caractere, care se termină cu enter. Pentru fiecare literă mică din șirul de caractere se cere să se determine frecvența de apariție.

Cerință

Pentru un șir de caractere determinați frecvența de apariție a fiecărei litere mici. Aceste litere mici se vor afișa în ordine alfabetică.

Restricții

- Șirul de caractere are cel mult 100000 caractere, litere mari, litere mici sau cifre;
- Șirul de caractere se termină cu enter.

Date de intrare

Fișierul `mici.in` conține pe prima linie șirul de caractere.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `mici.out` va conține pe o linie literele mici distincte din șirul de caractere în ordine alfabetică, iar pe o altă linie frecvențele de apariție ale acestora separate prin câte un spațiu.

Exemplu

`mici.in`	`mici.out`	**Explicație**
`Ab5xyz9bz7`	`bxyz` `2 1 1 2`	b apare de două ori, x apare o dată, y apare o dată, iar z apare de două ori.

Doru Constantin, Pitești

I 93 (**șiruri**)**.** Se dau M și N numere naturale nenule. Se cere să se determine vectorul F al primilor M termeni din șirul lui Fibonacci și vectorul P al primelor N numere prime. Apoi, determinați mulțimea T a numerelor care apar doar în M sau doar în P.

Cerință

Cunoscând M și N se cere să se determine șirurile F, P și mulțimea T.

Restricții

- $0 < M < 40$;
- $0 < N < 1000$.

Date de intrare

Fișierul `siruri.in` conține pe prima linie valorile lui M și N separate printr-un spațiu.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `siruri.out` va conține pe prima linie termenii lui F, pe a doua linie termenii lui P, iar pe a treia linie numerele din M, în ordine crescătoare, separați prin câte un spațiu.

Exemplu

`siruri.in`	`siruri.out`

`6 7`	`1 1 2 3 5 8`
	`2 3 5 7 11 13 17`
	`1 7 8 11 13 17`

Ion Alexandru Popescu, București

I 94 (**fibo**)**.** Se dă n număr natural. Construiți un tablou pătratic de dimensiune n cu termenii șirului lui Fibonacci astfel: prima linie cu termenii de la stânga la dreapta, a doua linie cu termenii de la dreapta la stânga, a treia linie cu termenii de la stânga la dreapta și așa mai departe.

Cerință

Cunoscând valoarea lui n construiți tabloul conform specificațiilor anterioare.

Restricții

- $1 \leq n \leq 40$.

Date de intrare

Fișierul `fibo.in` conține pe prima linie numărul n.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `fibo.out` va conține tabloul din enunț.

Exemplu

fibo.in	fibo.out
3	1 1 2 8 5 3 13 21 34

Doru Anastasiu Popescu, Pitești

I 95 (**cuvinte**). Se dau n cuvinte, care se termină cu *Enter*. Se cere să se afișeze, în ordinea inversă citirii, cuvintele care au numărul de vocale egal cu numărul de consoane.

Cerință

Cunoscând n și cele n cuvinte, afișați cuvintele care au același număr de vocale cu cel de consoane. Afișarea se va face în ordinea inversă citirii.

Restricții

- $1 \leq n \leq 1000$;
- Cuvintele au cel mult 20 de litere.

Date de intrare

Fișierul `cuvinte.in` conține pe prima linie n, iar pe celelalte n linii cuvintele.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `cuvinte.out` va conține cuvintele conform cerinței.

Exemplu

cuvinte.in	cuvinte.out
4 mov vara ana dana	dana vara

Costel Bălcău, Pitești

Clasa a X-a

I 96 (**text**)**.** Un text este format din litere mici și spații. Cuvintele sunt separate prin spații. Se cere să se înlocuiască cuvintele care încep și se termină cu o vocală cu oglinditele lor. Oglinditul unui cuvânt este același cuvânt citit de la dreapta la stânga.

Cerință

Dându-se un text ca cel de mai sus se cere să se modifice textul conform cu specificațiile anterioare.

Restricții

- Textul are cel mult 10000 de caractere.

Date de intrare

Fișierul `text.in` conține pe prima linie textul

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `text.out` va conține pe prima linie textul modificat.

Exemplu

text.in	text.out
ionela merge la iesire	alenoi merge la erisei

Ion Alexandru Popescu, București

I 97 (**fracții**)**.** Se dau n perechi de numere naturale nenule, ce reprezintă fracții. Afișați fracțiile în formă ireductibilă ordonate crescător.

Cerință

Pentru n fracții date, afișați fracțiile în formă ireductibilă ordonate crescător.

Restricții

- $n < 10000$;
- numărătorii și numitorii fracțiilor sunt numere naturale nenule cu maxim 6 cifre.

Date de intrare

Fișierul `fractii.in` conține pe prima linie n și apoi n perechi de numere naturale pe câte o linie separate prin câte un spațiu

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `fractii.out` va conține pe câte o linie numărătorul și numitorul câte unei fracții separați printr-un spațiu.

Exemplu

fractii.in	fractii.out
3 12 100 34 20 20 21	17 10 20 21 3 25

Doru Constantin, Pitești

I 98 (**dist**)**.** Se dau n puncte în plan prin coordonatele lor. Determinați punctele care să aibă suma distanțelor la celelalte puncte minimă.

Cerință

Cunoscând coordonatele celor n puncte, determinați numerele de ordine ale punctelor cu suma distanțelor la celelalte puncte minimă.

Restricții

- $1 \leq n \leq 100000$;
- Coordonatele punctelor sunt numere naturale ≤ 1000000.

Date de intrare

Fișierul `dist.in` conține pe prima linie n, apoi pe liniile următoare coordonatele punctelor separate printr-un spațiu.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `dist.out` va conține pe prima linie indicii punctelor cerute în enunț și distanța minimă separate prin câte un spațiu. Indicii vor fi afișați în ordine crescătoare.

Exemplu

dist.in	dist.out
3 5 0 5 10 5 30	2 30

Doru Anastasiu Popescu, Pitești

I 99 (**fotbal**)**.** Lotul unei echipe de fotbal este format din n fotbaliști identificați prin numerele $1, 2, \ldots, n$. Fiecare dintre aceștia are alocat câte două numere de la 1 la $2n$, pe care să le folosească pe spatele tricourilor. Nu există doi fotbaliști care să aibă alocat același număr. Antrenorul folosește într-o echipă exact k jucători și dorește să afle:

- Numărul de echipe pe care le poate forma cu k jucători, notat cu Ne. Două echipe sunt distincte dacă diferă prin cel puțin un jucător;
- Numărul total Nt de variante de tricouri (identificate prin numerele de pe tricoul fiecărui fotbalist) pe care le poate avea o echipă de k jucători.

Cerință

Cunoscând n și k, să se determine Ne și Nt.

Restricții

- $1 \leq n \leq 100$;
- $1 \leq k \leq n$.

Date de intrare

Fișierul `fotbal.in` conține pe prima linie numerele n și k separate prin spațiu.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `fotbal.out` va conține pe prima linie numerele Ne și Nt separate prin spațiu.

Exemplu

fotbal.in	fotbal.out
13 11	78 2048

Costel Bălcău, Pitești

I 100 (propozitii). Un text este format din litere mici și spații. Cuvintele sunt separate prin spații. Câte propoziții formate din k cuvinte distincte ce se găsesc în text se pot forma? Două propoziții sunt diferite dacă există o poziție pe care se găsesc două cuvinte diferite.

Cerință

Pentru un text dat, se cere să se determine numărul de propoziții cu k cuvinte distincte ce se găsesc în text.

Restricții

- $1 \leq k \leq 100$;
- Textul are cel mult 1000 de caractere și maxim 100 cuvinte.

Date de intrare

Fișierul `propozitii.in` conține pe prima linie k și pe linia a doua textul.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `propozitii.out` va conține pe prima linie numărul cerut în enunț.

Exemplu

propozitii.in	propozitii.out	**Explicație**
2 dan are are mere	6	Propozițiile ce se pot forma sunt: dan are are dan are mere mere are dan mere mere dan

Doru Anastasiu Popescu, Pitești

Clasele XI-XII

I 101 (**grupe**). Se dau n numere naturale. Determinați numărul Nr de modalități de împărțire a acestor numere în două grupe cu suma elementelor egală. Într-o grupă de numere nu are importanță ordinea elementelor.

Cerință

Cunoscând n și cele n numere naturale se cere să se determine numărul Nr.

Restricții

- $1 \leq n \leq 20$;
- Cele n numere sunt ≤ 10000.

Date de intrare

Fișierul `grupe.in` conține pe prima linie n, apoi pe linia a doua cele n numere separate prin câte un spațiu.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `grupe.out` va conține pe prima linie numărul Nr cerut în enunț.

Exemplu

`grupe.in`	`grupe.out`	**Explicație**
6 20 30 20 60 10 20	1	Exista o singură variantă de grupe cu suma egală: {20 30 20 10} {60 20}

Ion Alexandru Popescu, București

I 102 (**componente conexe**). Se dă un șir de caractere format numai din litere mici ale alfabetului englez. Se construiește un graf neorientat în care nodurile sunt etichetate prin litere distincte din șirul de caractere dat. Două noduri vor fi adiacente dacă sunt etichetate cu litere care se găsesc în alfabet pe poziții cu suma un număr prim.

Cerință

Cunoscând șirul de caractere, să se determine numărul de componente conexe ale grafului din enunț.

Restricții

- Șirul de caractere are cel mult 10000 de litere.

Date de intrare

Fișierul `cc.in` conține pe prima linie șirul de caractere.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `cc.out` va conține pe prima linie numărul de componente conexe ale grafului din enunț.

Exemplu

`cc.in`	`cc.out`	**Explicație**
`abaadghddgh`	`2`	Nodurile grafului vor fi etichetate cu literele a, b, d, g, h aflate în alfabet pe pozițiile $1, 2, 4, 7, 8$. Muchiile grafului sunt: $[a, b], [a, d]$ și $[d, g]$. Graful are două componente conexe.

Costel Bălcău, Pitești

I 103 (**subgrafuri**)**.** Se dă un graf neorientat cu n noduri și m muchii. Pentru acest graf se dorește determinarea subgrafurilor complete cu număr maxim de noduri. Aceste subgrafuri se numesc *clici*.

Cerință

Cunoscând n, m și cele m muchii se cere să se determine numărul de subgrafuri cu proprietatea din enunț.

Restricții

- $1 \leq n \leq 100$.

Date de intrare

Fișierul `subgrafuri.in` conține pe prima linie n și m separate printr-un spațiu, apoi pe următoarele m linii nodurile muchiilor separate prin câte un spațiu.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `subgrafuri.out` va conține pe prima linie numărul cerut în enunț.

Exemplu

`subgrafuri.in`	`sugrafuri.out`	**Explicație**

`9 10`
`6 3`
`9 4`
`3 7`
`1 6`
`8 4`
`2 7`
`1 5`
`8 9`
`2 3`
`5 6`
	`3`	Graful conține 3 subgrafuri cu proprietatea din enunt. Acestea au nodurile:
		1 5 6
		2 3 7
		4 8 9

Doru Anastasiu Popescu, Pitești

I 104 (**submulțimi**). Se dau $n < m$ numere natural. Se cere să se determine numărul Nr de submulțimi al mulțimii $\{n, n+1, \ldots, m\}$ cu suma un număr prim.

Cerință

Cunoscând n se cere să se determine Nr.

Restricții

- $1 \leq n \leq m \leq 20$.

Date de intrare

Fișierul `submultimi.in` conține pe prima linie n și m separate printr-un spațiu.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `submultimi.out` va conține pe prima linie numărul Nr.

Exemplu

`submultimi.in`	`submultimi.out`	**Explicație**
`2 4`	`4`	Cele patru submulțimi sunt: $\{2\}, \{3\}, \{2,3\}, \{3,4\}$.

Doru Constantin, Pitești

I 105 (**arbore**). Se dă un arbore cu n noduri prin vectorul tată și un nod r. Afișați nodurile arborelui parcurse în lățime, respectiv adâncime pornind din nodul r.

Cerință

Cunoscând n, r și componentele vectorului tată, afișați nodurile arborelui parcurse în lățime, respectiv adâncime pornind din nodul r.

Restricții

- $1 \leq n \leq 1000$.

Date de intrare

Fișierul `arbore.in` conține pe prima linie n, r separate printr-un spațiu și pe linia a doua vectorul tată.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `arbore.out` va conține pe prima linie nodurile parcurse în lățime, iar pe linia a doua nodurile parcurse în adâncime.

Exemplu

`arbore.in`	`arbore.out`
`8 4` `6 4 6 0 7 4 4 6`	`4 2 6 7 1 3 8 5` `4 2 6 1 3 8 7 5`

Doru Anastasiu Popescu, Pitești

Revistă sponsorizată de

ROWEB Development SRL

și

OSF Global Services SRL